サンドイッチ断面梁の曲げ振動解析

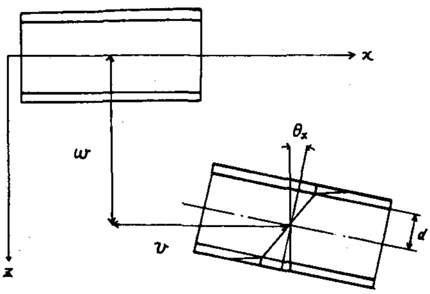
名古屋工業大学　正　員　松浦　聖
名古屋工業大学　学生員○川崎　昭弘

1.まえがき

複合構造のサンドイッチ構造梁および板の曲げ振動について解析を考える。サンドイッチ構造とは，薄肉で剛性の大きい二枚の表板と，それらにはさまれた軽量な心材からなる積層構造物である。本解析は，この三層のサンドイッチ構造梁板を有限要素法で解析するものとする。

2. 解析法

一般変位は図-1に示すような変形を生じるが，今，梁については，単位幅で，境界条件は両端固定として　図のひ変位は考えないものとする。低次固有振動に関して，全歪エネルギーは　表板の膜力と曲げおよび心材の剪断変形による歪エネルギーの和となり，変位関数はwについて三次関数，心材剪断変形は線形性を仮定する。以上のもとで　歪成分は次のようになる。



図－1

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{f_1} \\ \gamma_c \\ \varepsilon_{f_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +d_{f_1}\left(\partial\gamma_{c_1}/\partial x - \partial^2 w/\partial x^2\right) \\ -\gamma_{c_1} + \partial w/\partial x \\ -d_{f_2}\left(\partial\gamma_{c_1}/\partial x - \partial^2 w/\partial x^2\right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Z_{f_1}\,\partial^2 w/\partial x^2 \\ 0 \\ -Z_{f_2}\,\partial^2 w/\partial x^2 \end{Bmatrix} = [B]\{a\} \qquad (1)$$

応力－歪関係は，

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{f_1} \\ \tau_c \\ \sigma_{f_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{f_1} & 0 & 0 \\ 0 & G_c & 0 \\ 0 & 0 & E_{f_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{f_1} \\ \gamma_c \\ \varepsilon_{f_2} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{f_1} \\ \gamma_c \\ \varepsilon_{f_2} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

（添字の$f_{1,2}$, Cはそれぞれ上下層表板心材を示す）

サンドイッチ梁要素の自由度は，今，各節点につき三個（w_i, θ_i, γ_c）である。また$w = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$　$\gamma_{c_1} = a_4 + a_5 x$と仮定したため，全梁長を分割した一要素の長さを$l$とすると，要素左右端における節点変位マトリックスが得られ　$\{u\}^e = [C]\{a\}$　となる。剛性マトリックスは応力による歪エネルギーの変分を考え解くことができる。

$$\iiint_{V_{fc}} (\delta\varepsilon)^T \sigma\, dV = \iiint_V \{\delta a\}^T [B][D][B]\{a\}\, dV = \{\delta a\}^T \left(\iiint_V [B]^T[D][B]\, dV\right)\{a\}$$
$$= \{\delta u\}\{[C]^{-1}\}^T \left(\iiint [B][D][B]\, dV\right)[C]^{-1}\{u\} = \{\delta u\}[K]\{u\} \qquad (3)$$

全体の剛性マトリックスは　$[K] = [K_{f_1}] + [K_{f_2}] + [K_c]$の型となる。

次に　質量マトリックスは　慣性力と等価な節点外力を求めることにより，その仮想仕事から表板については，次式より

$$-\iiint_{V_f} \rho_f/g \cdot \ddot{u}\,\delta\ddot{u}\, dV_f = -\iiint_{V_f} \rho_f/g \cdot \{\delta a\}^T [H]^T [H]\{\ddot{a}\}\, dV_f - \iiint_{V_f} d^2\rho/g\, \{\delta a\}^T [N]^T [N]\{\ddot{a}\}\, dV_f$$
$$= -\{\delta w\}^T \{[C]^{-1}\}\left\{\int_0^l [H]^T \rho_f A_f/g\, [H]\, dx\right\}[C]^{-1}\{\ddot{w}\}$$

$$-\{\delta u\}^T\{[C]^{-1}\}^T\{\int_0^{\ell}[N]\,\rho_f d^2A_f/g\cdot[N]\,dx\}[C]^{-1}\{\ddot{u}\} \tag{4}$$

心材について 質量マトリックスは 次から求められる。

$$-\iiint_{V_c}\rho_c/g\;\ddot{u}\,\delta\ddot{u}\,dV_c = -\iiint_{V_c}\rho_c/g\,\{\delta a\}^T[N]^T[N]\{\ddot{a}\}\,dV_c = -\{\delta u\}^T\{[C]^{-1}\}^T\{\int_0^{\ell}[N]\,\rho_c I_c/g\,[N]\,dx\}[C]^{-1}\{\ddot{u}\} \tag{5}$$

ここで $[H][N]$ の成分は座標関係である。表板心材の質量マトリックスより全体では $[M]=[M_{f1,2}]+[M_c]$ となる。以上より求められた全体の剛性，質量マトリックスより固有振動は λ を固有振動数とする振動数方程式 $|K-\lambda^2M|=0$ を解く固有値問題となる。

板について 歪成分は，

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{Bmatrix}_{f1,2}=\begin{Bmatrix}\pm\, d_{fi}(\partial\gamma_x/\partial x-\partial^2w/\partial x^2)\\ \pm\, d_{fi}(\partial\gamma_y/\partial y-\partial^2w/\partial y^2)\\ \pm\, d_{fi}(\partial\gamma_x/\partial x+\partial\gamma_y/\partial y-2\,\partial^2w/\partial x\partial y)\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-Z_{fi}\,\partial^2w/\partial x^2\\ -Z_{fi}\,\partial^2w/\partial y^2\\ -2\,Z_{fi}\,\partial^2w/\partial x\partial y\end{Bmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yz}\end{Bmatrix}_c=\begin{Bmatrix}\gamma_{c_1}-\partial w/\partial x\\ \gamma_{c_1}-\partial w/\partial y\end{Bmatrix}_c$$

応力－歪関係は，表板は等方性の板として，

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E_{fi}}{(1-\nu^2)}\begin{bmatrix}1&\nu&0\\ \nu&1&0\\ 0&0&1-\nu/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{Bmatrix}_{f1,2} \tag{6}$$

$$\begin{Bmatrix}\tau_x\\ \tau_y\end{Bmatrix}_c=\begin{bmatrix}G_x&0\\ 0&G_y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yz}\end{Bmatrix}_c \tag{7}$$

一般の場合には，この歪成分の他に x, y の横方向変位を考慮すべきであるが，梁の拡張として求めた低次の振動に対しては，今 これらの諸因子だけを考えることにする。変位関数は w を x, y に関して三次，γ_c は x, y については一次関数と仮定することにより剛性および質量マトリックスを求めることができる。

本解法において，剛性マトリックスと質量マトリックスの無次元化を行うと，マトリックス要素に表板のヤング率，心材の剪断弾性係数との比と要素長との積 $(GA_c\ell^2/EI_c)$，質量マトリックスにおいては $(\rho_c I_c/\rho_f A_f\cdot\ell^2)$ が 現われる。このことから，梁長が長い場合には，心材の剪断剛性と表板の質量の影響が大きく，梁長が短かい場合では心材の剪断剛性の影響が減少する。また，サンドイッチ構造の特徴として剛性に対して軽量化があげられるように，その特質にあう弾性係数，梁の長さ質量により振動の性質、曲げの振動の固有値が異なる。

3. 数値計算例

サンドイッチ梁で 単位幅，境界条件は両端固定，梁長は $L=1{,}000\,cm$ 板厚は $10\,cm$ で 表板上下層 $1\,cm$，心材 $8\,cm$ で構成する。

心材剪断弾性係数／表板ヤング率 $= 610/21\times10^7$

心材比重／表板比重 $= 1/3$ の場合について計算を行った

固有値 μ_i

	要素分割数		
振動次数	2	3	5
1 次	1.31	1.28	1.27
2 次	2.41	2.17	2.09

$$f=\frac{\mu^2}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{gE(d^2A_f)}{\rho A_f}}$$

（参考文献）

(1) 林毅編 "軽構造の理論とその応用" (2) O.C. Zienkiewicz Y.K. Cheung "マトリックス有限要素法"

(3) 川井忠彦 "マトリックス振動および応答"