

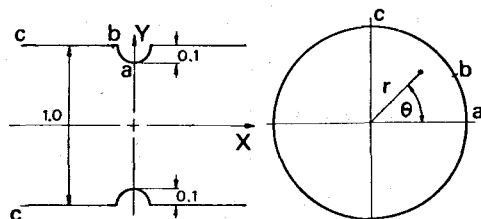
名古屋工業大学 正 員 長谷部宜男

名古屋工業大学 学生員 浅田 修造

1 まえがき 切欠き部材の解析は静的な問題としては過去、種々の形状、荷重について行なわれているが、動的な問題の報告はあまりなされていないようである。本報告は動的な応力集中問題の一例として、定常縦せん断振動する切欠き部材の解析を行なったものである。動的な問題は解析的に解くことが一般に困難であり、ここでは有理写像関数と差分法を用いて数値計算した。写像関数は曲線境界を含む物理領域を単位円内部に写像する。写像された単位円に差分法を適用することにより境界上に差分の格子点を作ることができ、境界条件を正確に表現できる。また差分法は誤差の評価が容易であるという長所をもつ。

2 基礎式及び解法 図-1 に示すように z 方向に一様な、両縁に半円形切欠きを有する帯板が切欠きより十分遠方で y 方向に一様な縦せん断力 $\tau_0 \cdot \exp(i\alpha t)$ の作用を受けるとき、 z 方向の変位 $w(x, y, t)$ のみが存在し、 $c^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ ($c^2 = G/\rho$) を満足する。 $w(x, y, t)$ を変数分離して $w(x, y, t) = W(x, y) \cdot \exp(i\alpha t)$ とおけば時間項を排除でき、

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \beta^2 W = 0, \quad \beta^2 = \frac{\alpha^2}{c^2} \quad (1)$$

図-1 (x, y) 面と 単位円

$$\text{応力成分は } \frac{\tau_{xz}}{G \exp(i\alpha t)} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{\tau_{yz}}{G \exp(i\alpha t)} = \frac{\partial W}{\partial y} \quad (2)$$

これを写像平面の極座標 (r, θ) で表示すると

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\beta^2}{r^2} W = 0 \quad (3)$$

$$\text{応力式は } \frac{\tau_{xz}}{G \exp(i\alpha t)} = r^2 \left(\frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right), \quad \frac{\tau_{yz}}{G \exp(i\alpha t)} = r^2 \left(\frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \quad (4)$$

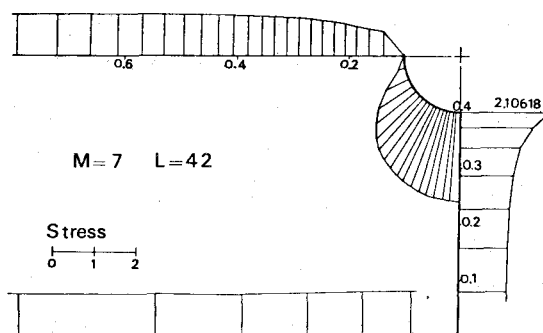
$$\text{ここで } r^2 = \frac{1}{|w(z)|^2}$$

$w(z)$ は写像関数の1次導関数

$$z = r \cdot \exp(i\theta)$$

式(4)において r^2 が陽に現われることが切欠き底の応力集中を精度よくとらえられる要因となっている。式(3)、(4)を差分表示することにより必要な差分式を得る。切欠きのない平板の定常縦せん断を表わす変位 W_0 は $W_0 = \tau_0 \cdot \cos \beta x$ で与えられるので、求める解 W を $W = W_1 + W_0$ とおき、 W_0 を差分により求めればよい。

3 解析結果 差分式としては1次差分近似を用いた。また対称性を利用することにより全

図-2 応力分布 $\beta = 0.0$

体の領域の $1/4$ を考えればよく、単位内の $1/4$ 扇領域 ($0 \leq t \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$) について t 方向に M 等分、 θ 方向に L 等分した。 $M=7$, $L=4$ の分割による応力分布を $\beta = 0.0, 2.0$ の場合につき図-2, 図-3 に示す。 ($\tau_0=1.0$ を基準としている。)

切欠き底の最大応力 τ_{max} の差分近似による誤差は第1次差分を用いた τ とにより

$$\tau_{max} = \tau_{(M,L)} + O\{(\Delta t)^2, (\Delta \theta)^2\}$$

と考えられ、評価の方法としては、 $(\Delta t)^2, (\Delta \theta)^2$ に関する線形性を利用する方法 [1], [2] もあるが、 $\Delta t, \Delta \theta$ の相乗効果により線形性が保証されない場合がある。 τ ではある程度大きい分割 (M, L) に対して真の最大応力 τ_{max} と分割 (M, L) に差分により得られる $\tau_{(M,L)}$ の間に成り立つ

$$\tau_{max} = \tau_{(M,L)} + A(1/M^2) + B(1/M)(1/L) + C(1/L^2) \quad (5)$$

なる関係を用いる。適当な4組の分割数 (M, L) に対する差分解 $\tau_{(M,L)}$ を用いて A, B, C, τ_{max} の4元1次連立方程式を解くことにより τ_{max} の値が求められる。この方法により求めた τ_{max} と β の関係を図-4 に示す。 $\beta = 0.0$ (静的な場合) に対しては $\tau_{max} = 2.0304$ を得た。文献 [3] の厳密解 2.0681 と比較して -1.82% の誤差がある。 τ_{max} の値に対する θ 方向の分割数 L の影響は、 t 方向の分割数 M の影響に比べて著しく大きい。精度の上からは、切欠き端の点に格子点を作る τ が望ましいが、今の場合、 $1/4$ 扇領域 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ を等分割する方法では τ 点に格子点を作ることができず、誤差の主要因となっている。

β が 2.0 に近づくとき各分割による差分解 $\tau_{(M,L)}$ の値にばらつきが大きくなり、2.0 より大きい β に対しては解が得られなかった。これは β が 2.0 よりやや大きいところには共振点があるためと考えられ、別の角度からの検討が必要であろう。

4 結び 以上、写像関数と差分法を用いた切欠き部材の定常せん断振動の一解析例を示した。この方法で写像関数を変えれば他の形状についても解析が可能である。また (1) 式と連う形の基礎式に支配される問題に対しても適用可能であろう。

<参考文献>

- [1] 長谷川 長谷部 ; 写像関数と差分法を用いた変断面棒のねじり 中部支那51年度学術発表会
- [2] 久世 長谷部 ; 写像関数と差分法を用いた環状クラフを有する丸棒の応力拡大係数 第27回応用力学学会講演会 抄録集 (52年10月)
- [3] 長谷部 ; 両側半無限開放を有する弾性板のねじりおよびせん断 第30回年度学術講演会 概要集 第1部