I－5

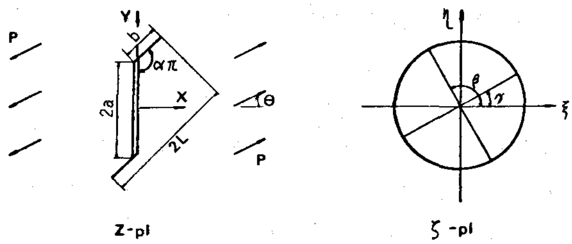
屈折クラックの一解析

名古屋工業大学　正員　長谷部 宣男
名古屋工業大学　学生員　○猪原　茂

1.まえがき　実際のクラックは、直進だけではなく、分岐、曲折、屈折などの複雑な伝ぱ過程を経て進展するものが多い。したがって、クラック挙動を研究するためには、これらの分岐、曲折、屈折現象を考慮したクラックモデルを考えて解析する必要がある。このようなクラックの解析としては、北川ら[1]による等角写像法，村上[2]や石田[3]による体積力法などがある。本報告では、無限板中に図-1に示す逆対称な両端屈折クラックモデルを考え、これに等角写像法を用いて境界に沿う縁応力分布と応力拡大係数の一解析例を示した。

2.写像関数　物理領域をζ平面上の単位円上とその外側の領域に写像する写像関数は、Schwarz-Christoffel の公式から、次式となる。

$$z=\omega(\zeta)=C\int^{\zeta}\frac{(1+e^{\gamma i}/\zeta)^{1-\alpha}(1-e^{\gamma i}/\zeta)^{1-\alpha}(\zeta+i)(\zeta-i)}{(1+e^{\beta i}/\zeta)^{1-\alpha}(1-e^{\beta i}/\zeta)^{1-\alpha}\;\zeta^{2}}d\zeta \qquad (1)$$



図－1

ここで、Cはクラックの2a部分をy軸に平行になるよう回転する複素定数，β、γ及びiは図-1に示すz平面でのクラックの屈折点及びクラック先端に対応するζ平面上でのパラメータ及び点である。

(1)の無理型写像関数を有理型で近似するに当って、屈折部$\alpha\pi$に相当する項 $1/(1\pm e^{\beta i}/\zeta)^{1-\alpha}$ は収束が遅いので、形状全体を良く近似するために、収束の遅い項と速い項に分離すると次式となる。

$$z=\omega(\zeta)=\frac{D}{\alpha e^{\beta i}}\left(1-\frac{e^{\beta i}}{\zeta}\right)^{\alpha}-\frac{D}{\alpha e^{\beta i}}\left(1+\frac{e^{\beta i}}{\zeta}\right)^{\alpha}$$

$$+C\int^{\zeta}\left\{\left(1-\frac{e^{2\gamma i}}{\zeta^{2}}\right)^{1-\alpha}\left(1-\frac{e^{2\beta i}}{\zeta^{2}}\right)^{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{\zeta^{2}}\right)-\frac{D}{\zeta^{2}}\left(1+\frac{e^{\beta i}}{\zeta}\right)^{\alpha-1}-\frac{D}{\zeta^{2}}\left(1-\frac{e^{\beta i}}{\zeta}\right)^{\alpha-1}\right\}d\zeta \qquad (2)$$

ただし、Dは$2^{\alpha-1}(1+e^{2\beta i})(1-e^{2\gamma i}/e^{2\beta i})^{1-\alpha}\cdot C$で与えられる。

収束の速い項((2)の第3項)を分数式の和の形で表わされる有理写像関数に近似するには、まず速い項のベキ展開を行ない、その各係数が分数式のベキ展開の係数と有限項をもって一致するように分数式の係数を決定する。本解析では偶数ベキの係数が零なので、(3)となり、n個の分数式の和をベキ展開すると(4)となる。

$$(\text{(2)の第3項})=\zeta+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\zeta^{2k-1}} \qquad (3),\qquad \sum_{j=1}^{n}\frac{B_j\,\beta_j/\zeta}{1-\beta_j/\zeta}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j\cdot\beta_j^{k}}{\zeta^{2k-1}} \qquad (4)$$

ここで、ベキ展開可能であるためには$|\beta_j|<1$である。

未定定数B_j，β_j $(j=1,2,\cdots n)$を決定するには、同じベキ乗の係数を近似的に等しいと置くことによって $\sum_{j=1}^{n}B_j\cdot\beta_j^{k}=a_k$ $(k=1,2,\cdots,2n)$　(5)　なる2n個の式ができる。この2n元の非線形連立方程式の解は、n元1次連立方程式(6)を解き，その解X_i $(i=1,2,\cdots n)$を係数とするn次代数方程式(7)の根が求めるβ_j $(j=1,2,\cdots n)$である。β_jが求まれば，B_j $(j=1,2,\cdots n)$は、式(5)の始めのn個にβ_jを代入して得られる

B_jに関するn元1次連立方程式を解いて求まる。

$$\left.\begin{aligned} a_1X_1 + a_2X_2 + &- - - + a_nX_n + a_{n+1} = 0 \\ a_2X_1 + a_3X_2 + &- - - + a_{n+1}X_n + a_{n+2} = 0 \\ &\vdots \\ a_nX_1 + a_{n+1}X_2 + &- - - + a_{2n-1}X_n + a_{2n} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\beta^n + X_n\beta^{n-1} + X_{n-1}\beta^{n-2} + \cdots + X_2\beta + X_1 = 0 \quad (7)$$

なお、式(2)の第1項，第2項は収束が遅いので，ζの高次の項まで一致させなければならないため特別のくふう[4]がいる。このように決定した有理写像関数は，次式のような形で書ける。

$$z = \omega(\zeta) = C\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + \zeta\right\} \quad (8)$$

3.解法及び応力拡大係数の決定　解法はここでは省略する。(文献[4]を参照) また、クラック先端の応力拡大係数は，複素応力関数$\phi(\zeta)$，有理写像関数$\omega(\zeta)$を用いて，次式となる。

$$K_I - iK_{II} = 2\sqrt{\pi}\, e^{-i\delta} \frac{\phi'(\zeta_0)}{\sqrt{\omega'(\zeta_0)}} \quad (9)$$

，本報告では$\delta = (\alpha - \frac{1}{2})\pi$，$\zeta_0 = i$である。

4.解析結果　本解析例では，収束の遅い項(3)で$1/\zeta$の33乗から49乗までの適当な項数を取り，屈折角$\alpha\pi = 135°$，クラック幅$\varepsilon = 0.005a$，荷重方向$\theta = 0°$，$-15°$，$-30°$，$-45°$の計算結果を示す。図-2の上部は屈折のある場合，下部には屈折のない場合の，荷重方向$\theta = 0°$における応力分布を示す。図-3には，各荷重方向に対する応力拡大係数を，長さ2Lに投影して無次元化して示している。なお，図中の点線の値は，長さ2Lに投影した傾斜直線クラックの各荷重方向における応力拡大係数で，次式によって与えられる。

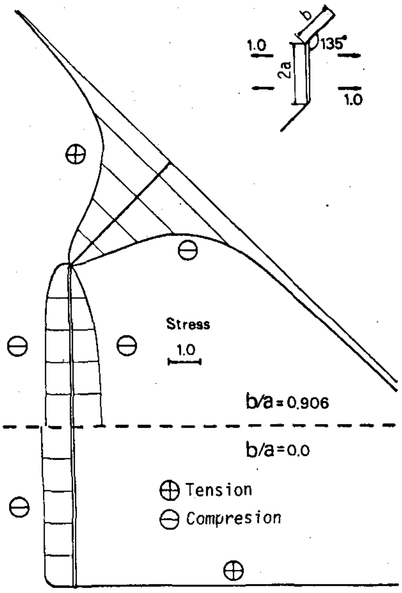
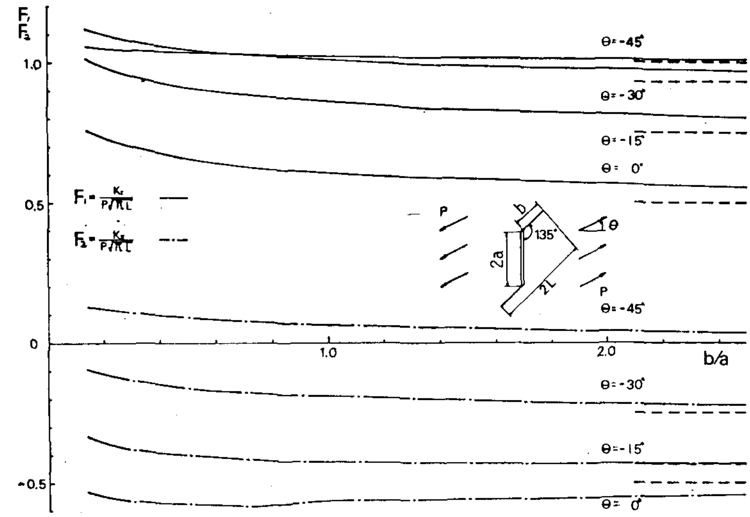


図-2　境界に沿う縁応力分布 ($\theta = 0°$)

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= K_I/P\sqrt{\pi L} = \sin^2(135° + \theta) \\ F_2 &= K_{II}/P\sqrt{\pi L} = \sin(135° + \theta)\cos(135° + \theta) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

4.結び　本報告では，逆対称な両端屈折クラックモデルに等角写像法を用いた解析結果を示したが，この結果と北川ら[1]の結果とは良い一致が見られた。したがって，一般に無限板中に多角形で表わされるクラックモデルの解析に当っては，Schwarz-Christoffelの公式が成立するのでこの等角写像法は，適用範囲の広い解法である。



図－3　両端屈折クラックの応力拡大係数

文献　[1]北川,結城，日本機械学会講演論文集,No770-11(S52)，10-17　[2]村上，同，No770-11(S52)，54-61
[3]石田，同(関西支部)，No774-12(S52)，1-8　[4]長谷部，土木学会論文報告集，第194号，1971