IV－20

Beckmannモデルによる均衡交通量の推定法

岐阜大学工学部　正会員　加藤　晃
岐阜大学工学部　正会員　宮城俊彦
岐阜大学大学院　学生員○佐藤祐二

1. まえがき

ＯＤ間の需要が変動する場合の道路ネットワークにおける均衡問題は、1956年にBeckmannらによって非線形計画問題として定式化されている。[1] このモデルはBeckmannの労作によると考えられるので本論文ではこれをBeckmannモデルと呼ぶ。このモデルにおける目的関数は、$H(\cdots x_{ijk}\cdots)=\sum_{i,k}\int_0^{x_{ik}} g_{ik}(x)dx-\sum_{ij}\int_0^{x_{ij}} t_{ij}(x)dx$ のような形であり、x_{ijk}（リンクi-jの交通量のうち、目的地kへ向う交通量）という変数が用いられている。しかし、このモデルではi, j, kがセントロイドの場合だけで成立し、このまま中間ノードを含むネットワークに適用することは困難である。そこで、本研究では中間ノードを含む一般的なネットワークへの適用を考えて、変数としてパスフローを選び、定式化を行なった。また目的関数最大化の計算には、従来制約条件なしの問題に用いられる方法を変形して用い、さらに可能なすべての経路を考えなければならないということを、回避するために最短経路探索を行ないながら逐次、変数をとりいれていくという方法を採用した。

2. モデルの定式化

ＯＤペアの数をN、リンク数をlとすれば、Beckmannモデルの目的関数は式(1)で表わされる。

$$F(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^{N}\int_0^{x^i} g^i(x)\,dx-\sum_{j=1}^{l}\int_0^{x_j} T_j(x)\,dx \qquad (1)$$

$$\mathbf{X}=(\cdots,x_k^i,\cdots),\qquad x_k^i\geqq 0 \qquad (2)$$

x^i：ＯＤペアiの交通量

x_j：リンクjの交通量

x_k^i：ＯＤペアiにおけるk番目のパスの交通量

$g^i(x^i)$：ＯＤペアiにおける需要関数$x^i=d^i(t^i)$の逆関数$t^i=g^i(x^i)$　（単調減少関数）

t^i：ＯＤペアiの所要時間

$T_j(x_j)$：リンクjの供給関数（走行時間関数）$t_j=T_j(x_j)$　（単調増加関数）

t_j：リンクjの通行時間

x_k^iとx_j, x^iとの関係は、式(3), 式(4)で表わされる。

$$x^i=\sum_k x_k^i \qquad (3) \qquad\qquad x_j=\sum_{i=1}^{N}\sum_k \delta_{kj}^i\cdot x_k^i \qquad (4)$$

$$\delta_{kj}^i=\begin{cases}1：リンクjがＯＤペアiのk番目のパスに属する場合\\0：リンクjがＯＤペアiのk番目のパスに属さない場合\end{cases}$$

ところで、$g^i(x^i)$が単調減少関数であり、$T_j(x_j)$が単調増加関数ならば、目的関数Fは凹関数といえる。従って、式(2)のもとでの目的関数Fが最大値をもつための条件である、Kuhn-Tucker条件より、式(5),式(6)が成立する。$\frac{\partial F}{\partial x_k^i}=0$　$x_k^i>0$の場合　(5)　$\frac{\partial F}{\partial x_k^i}\leqq 0$　$x_k^i=0$の場合　(6)

ただし、式(1),式(3),式(4)より　$\frac{\partial F}{\partial x_k^i}=g^i(x^i)-\sum_{j=1}^{l}\delta_{kj}^i T_j(x_j)$　(7)

式(7)を、式(5)、式(6)に代入して、

$$g^i(x^i) = \sum_{j=1}^{\ell} \delta_{kj}^i T_j(x_j) \quad x_k^i > 0 \text{ の場合} \tag{8}$$

$$g^i(x^i) \leqq \sum_{j=1}^{\ell} \delta_{kj}^i T_j(x_j) \quad x_k^i = 0 \text{ の場合} \tag{9}$$

式(8)、式(9)はWardropの等時間原則の数学的表現と一致する。以上のことより、式(1)を式(2)のもとで最大化すれば、等時間原則を満足する均衡解x_k^iを求めることができる。

3. 目的関数最大化の計算アルゴリズム

目的関数最大化の計算には、勾配法(最急勾配法)とNewton−Raphson法を考えた。

勾配法を用いたアルゴリズムのフローチャートは図-1に示す通りである。rは繰り返し回数を示し、r回目の$x_k^i|_r$の増分$\Delta x_k^i|_r$は式(10)で決定される。

$$\Delta x_k^i|_r = \begin{cases} 0 & : x_k^i|_r = 0 \text{ かつ } \frac{\partial F}{\partial x_k^i}\Big|_r < 0 \text{ の場合} \\ \alpha \frac{\partial F}{\partial x_k^i}\Big|_r & : \text{他の場合} \end{cases} \tag{10}$$

したがって、$x_k^i|_{r+1}$は式(11)で決定される。

$$x_k^i|_{r+1} = \begin{cases} x_k^i|_r + \Delta x_k^i|_r & : x_k^i|_{r+1} > 0 \text{ の場合} \\ 0 & : x_k^i|_{r+1} < 0 \text{ の場合} \end{cases} \tag{11}$$

また、最短経路探索を行ない新しい経路が出現するたびに、その経路に対するパスフローを変数としてとり入れる。

Newton−Raphson法を用いたアルゴリズムは、上述の勾配法のステップ幅αの代わりに、ヘジアン行列の逆行列を用いる方法である。式(6)を満足しない$x_k^i|_r$のベクトルをW_rとすればΔW_rは式(12)で求められる。

$$\Delta W_r = -\left[\frac{\partial^2 F}{\partial W_r^2}\right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial W_r} \tag{12}$$

また、他の$\Delta x_k^i|_r$は0とする。式(12)で必要となる式(1)のパスフローに関する2階偏微分は式(13)で求られる。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_m^n \partial x_k^i} = g^{i\prime}(x^i) \frac{\partial x^i}{\partial x_m^n} - \sum_{j=1}^{\ell} \delta_{kj}^i \delta_{mj}^n T_j'(x_j) \tag{13}$$

ここに$\frac{\partial x^i}{\partial x_m^n}$は$i = n$かつ$k = m$の場のみ1、他は0、$g^{i\prime}(x^i) = \frac{d}{dx^i} g^i(x^i)$、$T_j'(x_j) = \frac{d}{dx_j} T_j(x_j)$である。

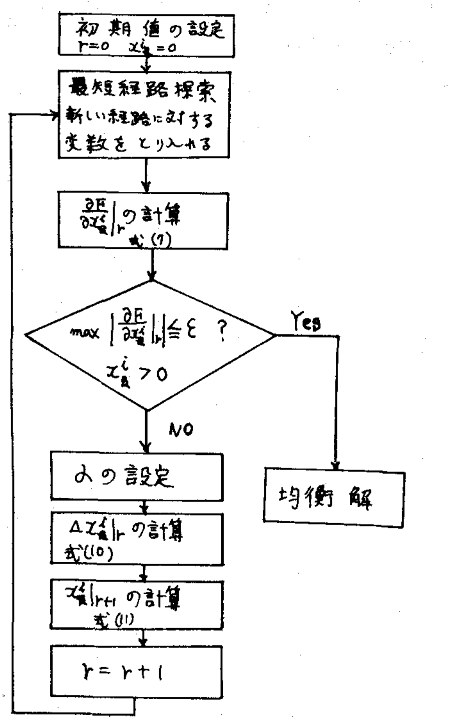

図 1. 勾配法を用いたアルゴリズムのフローチャート

4. あとがき

まえがきで述べたように、本研究では目的関数最大化の計算に最短経路探索を導入するという方法を採用したので、可能なすべての経路を考慮する必要がなく、計算機容量の点で利点があると思われる。また、変数としてパスフローを用いたので、結果としてODペアごとに等時間パターンが明確にわかる。本研究の方法と類似していると思われる増加交通配分法では逐次最短経路のみに交通量を負荷していくが、本研究の方法では利用しているすべての経路に同時に交通量を負荷していると考えられる。欠点として、本研究の方法では利用する経路を記憶していなければならない点などを有する。なお、計算結果は当日発表する。

参考文献 1) Beckmann, M.J. McGuire, C.B. and Winsten, C.B., (1956) 「Studies in the Economics of Transportation」