Ⅳ－２

交通密度の計測誤差分布と区間長決定

信州大学工学部　正員　奥谷　巖

１，まえがき

交通密度の計測誤差の分布については，先に研究発表を行なっているが[1]，そこでは交通量を一定と考えて議論を進めていた。しかしながら，実際には交通量は常に確率変動をしていることから，こうした仮定のもとに求められた計測誤差の分散は，現実の値より小さくなってくるなど不都合な点があったといえる。したがって，まずここでは交通量の確率分布を考えた場合の交通密度計測誤差の分布式を導出するとともに，平均値および分散を与える式を導き，ついでそれらの関係式を用いて，交通密度を計測する場合の適正区間長の決定方法について若干の考察を行なう。

２，交通密度計測誤差の確率分布

交通密度の計測区間長をL，その中の初期自動車台数をN_0とし，τ時間の計測区間上流端からの流入台数をN_u，下流端からの流出台数をN_dとすると，τ時間後の区間Lの交通密度kは　$k=(N_0+N_u-N_d)/L$　(1)　として表わされる。しかしながら，τ時間の交通量N_u，N_dには，車両検知信号の処理装置におけるスキャンニング周期のとり方あるいは車の走行形態等が原因する計測誤差が含まれる。いま，対象とする計測区間の上流端または下流端を１台の自動車が通過したとき，その車がカウントされない確率をp，２台とカウントされる確率をq，それ以外の誤差の発生確率は無視できる程度に小さいものとする。そうすると，１台の車が正しく１台とカウントされる確率は$(1-p-q)$となる。そうすると，一般にn台の自動車が通過したとき，ξ台のアンダーカウントが発生する確率$\hat{P}(\xi|n)$，およびξ台のオーバーカウントが発生する確率$\bar{P}(\xi|n)$は，多項分布の考え方より

$$\hat{P}(\xi|n)=\sum_{\lambda=0}^{n^*}[n!/\{(\xi+\lambda)!\,\lambda!\,(n-\xi-2\lambda)!\}]\cdot p^{\xi+\lambda}\cdot q^{\lambda}\cdot(1-p-q)^{n-\xi-2\lambda} \qquad (2)$$

$$\bar{P}(\xi|n)=\sum_{\lambda=0}^{n^*}[n!/\{\lambda!\,(\xi+\lambda)!\,(n-\xi-2\lambda)!\}]\cdot p^{\lambda}\cdot q^{\xi+\lambda}\cdot(1-p-q)^{n-\xi-2\lambda} \qquad (3)$$

ここに，n^*は$(n-\xi)/2$をこえない最大の整数とする。いま，$P(\xi|n)$を上記２つを代表する確率とし，アンダーカウントのときξを負（ただし，式(2)の計算には$|\xi|$を用いる），オーバーカウントのときξを正と約束するものとすると，定常状態における交通量nの確率変動を考慮したξ台の誤差発生確率$P(\xi)$は　$P(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\tau)\cdot P(\xi|n)$　(4)　となる。次に，交通量の計測誤差と計測区間内存在台数の計測誤差の関係について考えてみる。まず，上流端の場合であるが，ここでのξ台のアンダーカウントおよびオーバーカウントはそのまま当該区間内存在台数のξ台のアンダーカウントおよびオーバーカウントを意味することになる。また，下流端の場合はちょうどこの逆となる。以上から，上下流端を同時に考慮した対象区間内存在台数の計測誤差発生確率P_ξは，$P_\xi=\{P(\eta)*P(\nu)\}_{\eta-\nu=\xi}$　(5)　となる。ただし，式(5)は$(\eta-\nu)$がちょうどξとなるすべての組み合わせについて，$P(\eta)\cdot P(\nu)$を計算しそれを加え合わせたものを意味する。ところで，存在台数にξ台の誤差があることは，すなわち交通密度にξ/Lの誤差があることを意味するので，ξ/Lの交通密度計測誤差発生確率は式(5)で表わされるP_ξに等しいといえるのである。

次に，式(5)を用いて交通密度計測誤差の平均値と分散を求めておく。まず平均値であるが，上流端

における交通量の計測誤差をη，下流端のそれをνとすると，区間内存在台数の計測誤差ξは$\xi=\eta-\nu$　　となることは先に述べたが，そうすると，ξの平均値はηの平均値からνの平均値を引いたものとなり，上下流端の誤差発生確率p.qが等しいときにはそれらの平均値はまったく等しくなることから，$E(\xi)=0$　　となる。よって，交通密度の計測誤差の平均値も0となる．一方，p,qの値が上下流端で異なる場合には次のようになる。まず，ηの平均値$E(\eta)$であるが，式(4)より

$$E(\eta)=\sum_{\eta=-\infty}^{\infty}\eta\cdot P(\eta)=\sum_{\eta=-\infty}^{\infty}\sum_{n=|\eta|}^{\infty}P_n(\tau)\cdot P(\eta|n)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\tau)\cdot\left\{\sum_{\eta=-n}^{n}\eta\cdot P(\eta|n)\right\} \qquad (6)$$

となるが，式(6)の{ }の中は自動車がn台とおったときの計測誤差の平均値であるから，1台とおったときの平均値$(q-p)$のn倍として表わされるから　$E(\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot(q-p)\cdot P_n(\tau)=\bar{n}\cdot(q-p)$　　(7)

となる。ここに$\bar{n}$はnの平均値である。$E(\nu)$も式(7)と同じ式で表わされることは言うまでもないから，いま上下流端のp，qをそれぞれp_1，q_1およびp_2，q_2とすると，結局　$E(\xi)=E(\eta)-E(\nu)=\bar{n}(q_1-p_1)-\bar{n}(q_2-p_2)=\bar{n}\cdot\{(q_1-p_1)-(q_2-p_2)\}$　　(8)　　となる。

次に，ξの分散であるが，$\xi=\eta-\nu$の関係より，ηの分散とνの分散の和として表わされるので，pおよびqの値が上下流端異なる場合を前提に，まず$V(\eta)$を求めることを考える。分散の定義より

$$V(\eta)=\sum_{\eta=-\infty}^{\infty}\eta^2 P(\eta)-\{E(\eta)\}^2=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\tau)\cdot\left\{\sum_{\eta=-n}^{n}\eta^2\cdot P(\eta|n)\right\}-\bar{n}^2\cdot(q_1-p_1)^2 \qquad (9)$$

式(9)の{ }の中は，車がn台通過したときの計測誤差の分散σ_n^2に，そのときの平均値$n\cdot(q_1-p_1)$の2乗を加えたものとして表わされるが，σ_n^2は1台の車が通過したときの分散σ_1^2のn倍となるから，われわれは結局σ_1^2を求めれば，式(9)の計算ができることになる。ところがσ_1^2は　$\sigma_1^2=(-1)^2\cdot p_1+0^2\cdot(1-p_1-q_1)+(+1)^2\cdot q_1-(q_1-p_1)^2=(p_1+q_1)-(q_1-p_1)^2$　　(10)　　として容易に求められるから，結局

$$V(\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\tau)\cdot[n\cdot\{(p_1+q_1)-(q_1-p_1)^2\}+n^2\cdot(q_1-p_1)]-\bar{n}^2\cdot(q_1-p_1)=\bar{n}\cdot\{(p_1+q_1)-(q_1-p_1)^2\}+(q_1-p_1)\cdot\sigma_g^2 \qquad (11)$$

となる。ここに，$\sigma_g^2=\sum_{n=0}^{\infty}n^2\cdot P_n(\tau)-\bar{n}^2$　　(12)　　であり，交通量の分散を意味する。$V(\nu)$の求め方および結果も同様である。以上より，$V(\xi)=V(\eta)+V(\nu)=\bar{n}\cdot[\{(p_1+q_1)-(q_1-p_1)^2\}+\{(p_2+q_2)-(p_2-q_2)^2\}]+\sigma_g^2\cdot\{(q_1-p_1)+(q_2-p_2)\}$　　(13)　　となる。式(13)でτが大きくなると$\bar{n}$は明らかに大となり，またσ_g^2も大となるので，$V(\xi)$の値は交通密度計測開始時点から時間が経過するとともに大きくなる性質がある。なお，言うまでもないが，交通密度の計測誤差の平均値は式(8)をLで除したものであり，分散は式(13)の値をL^2で除したものである。

3．計測誤差を規準とした交通密度の計測区間長の決定

交通密度の実際の値の100α%以上の計測誤差が発生する確率を，あらかじめ与えられた水準β以下にする最小の計測区間長をもって適正な交通密度の計測区間長とするという規準によって決定する。いま，簡単のために，交通密度および計測誤差を連続量と仮定し，それらの確率密度を$\theta(x)$，$\varphi(y)$とすると，上述の関係は次のように数式化できる．$\int_0^{k_{max}}\theta(x)\cdot\left\{\int_{\alpha\cdot x}^{\infty}\varphi(y)dy+\int_{-\infty}^{-\alpha\cdot x}\varphi(y)dy\right\}dx\leqq\beta$　　(14)

式(14)を満たす最小のLをみつければ，それがここでいう適正な計測区間長となる。いま，交通密度の計測を開始して4時間後の値について，$\alpha=\beta=0.1$としてLを決定してみる。経過時間が長いことを考え，$\varphi(y)$および$\theta(x)$は正規分布を仮定し，式(14)により計算すると，$\bar{x}=53.5$，11.4，4.8　に対応して，それぞれ$L=440m$，$1120m$，$1820m$　となった。

参考文献

1) 奥谷：交通情報の特性に関する2,3の考察，第29回土木学会年次学術講演会講演概要集，昭和49年10月