

粒状体の応力と粒子間力について

信州大学工学部 正会員 小西 純一

1. まえがき

砂のような粒状体の応力の概念は、粒状体が個々の粒子から成りしかも多くの間隙を有しているため、連続体の場合と異なる。粒状体においては、実質部分の断面力あるいは粒子間に働く粒子間力を用いて巨視的平均応力を定義し、これを連続体の取り扱いをする場合の応力と考えている。

本報告では粒状体の応力と粒子間力を用いて定義し、さらに粒状体の構造特性との関係を考察する。

2. 粒状体における応力の定義

巨視的にみて一様な粒状体の内部に微小な直角六面体を考え、各要素面上に働く(巨視的)応力の各成分と粒子間力で表わすことを考えよう(図-1)。この微小六面体には十分多数の粒子が含まれているものとする。いま要素面 ΔS_z 付近を拡大してみると図-2のように、要素六面体に属する $\parallel$ を施した粒子(重心が六面体内部にある)は、外部の粒子(重心が外部にある)と n_z 個の接点において接触し、粒子間力 $f_1, f_2, \dots, f_k, \dots, f_{n_z}$ と及ぼし合っている。これらの粒子間力のベクトル和 f_z は

$$f_z = \sum_{k=1}^{n_z} f_k \quad (1) \text{ となる。}$$

$$\begin{aligned} x, y, z \text{ 方向成分はそれぞれ } f_{zx} &= \sum_{k=1}^{n_z} f_{kx}, f_{zy} = \sum_{k=1}^{n_z} f_{ky}, f_{zz} = \sum_{k=1}^{n_z} f_{kz} \\ \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここに、 f_{zx}, f_{zy}, f_{zz} : f_z の x, y, z 方向成分; f_{kx}, f_{ky}, f_{kz} ($k=1, 2, \dots, n_z$) : f_k の x, y, z 方向成分、となる。

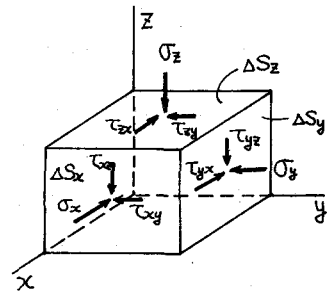


図-1

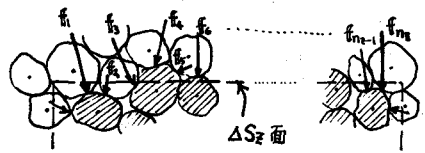


図-2

$\tau_{zx} = f_{zx} / \Delta S_z, \tau_{zy} = f_{zy} / \Delta S_z, \sigma_z = f_{zz} / \Delta S_z \dots\dots\dots (3)$ と置きこれに ΔS_z 面上の巨視的平均応力(あるいは単に応力)と定義する。(3)に(2)を代入すると次式が得られる。 $\Delta S_x, \Delta S_y$ 面についても同様であるからこれらをもとめて書くと 粒子間力と応力との関係を与える基本式は

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\Delta S_x} \sum_{i=1}^{n_x} f_{ix}, \tau_{xy} = \frac{1}{\Delta S_x} \sum_{i=1}^{n_x} f_{iy}, \tau_{xz} = \frac{1}{\Delta S_x} \sum_{i=1}^{n_x} f_{iz}; \tau_{yx} = \frac{1}{\Delta S_y} \sum_{j=1}^{n_y} f_{jx}, \sigma_y = \frac{1}{\Delta S_y} \sum_{j=1}^{n_y} f_{jy}, \tau_{yz} = \frac{1}{\Delta S_y} \sum_{j=1}^{n_y} f_{jz}; \\ \tau_{zx} &= \frac{1}{\Delta S_z} \sum_{k=1}^{n_z} f_{kx}, \tau_{zy} = \frac{1}{\Delta S_z} \sum_{k=1}^{n_z} f_{ky}, \sigma_z = \frac{1}{\Delta S_z} \sum_{k=1}^{n_z} f_{kz}. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。

ここで z 軸, x 軸および y 軸をそれぞれ主応力 σ_1, σ_2 および σ_3 の方向に一致するように選び、 $z \rightarrow 1, x \rightarrow 2, y \rightarrow 3$ と書きかえると、粒子間力と主応力との関係は次のようになる。

$$\sigma_1 = \frac{1}{\Delta S_1} \sum_{i=1}^{n_1} f_{i1}, \sigma_2 = \frac{1}{\Delta S_2} \sum_{j=1}^{n_2} f_{j2}, \sigma_3 = \frac{1}{\Delta S_3} \sum_{k=1}^{n_3} f_{k3}; \sum_{i=1}^{n_1} f_{i2} = \sum_{j=1}^{n_2} f_{j1} = \sum_{j=1}^{n_2} f_{j2} = \sum_{k=1}^{n_3} f_{k1} = \sum_{k=1}^{n_3} f_{k2} = 0 \quad \dots\dots (5)$$

3. 粒状体の構造特性との関係

任意の接点における粒子間力は、主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 、その接点の接点角 α_i, β_i 、物理摩擦角 ϕ 、粒状体の構造特性などに支配されるが、一方でこの粒子間力はその大きさと方向においてかなり random

な性質を有している。図-3に示すような、接点角 α_i , β_i をもつ接点 i における粒子間力 $\vec{f}_i$ の方向は $(-\vec{f}_i/|\vec{f}_i|) \cdot \vec{v}_i \geq \cos \phi_m$ または $\alpha_i \leq \phi_m$ (6) なる条件下において任意の角度を取り得るし、大きさも任意に取り得るのである。そこでここでは、 $\vec{f}_i$ の期待値 $\bar{\vec{f}}_i$ (成分 $\bar{f}_{i1}, \bar{f}_{i2}, \bar{f}_{i3}$) に着目した小田⁽¹⁾⁽²⁾の考え方を一部修正して用いることにする。

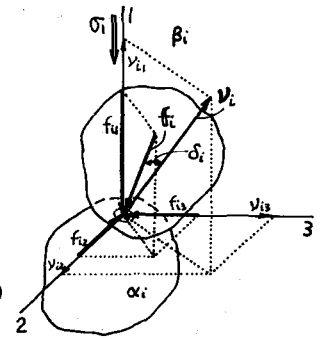


図-3

小田の提案式は

$$\bar{f}_{i1} = k_1 \cdot \sigma_1 \cdot |\cos \beta_i|, \quad \bar{f}_{i2} = k_2 \cdot \sigma_2 \cdot |\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i|, \quad \bar{f}_{i3} = k_3 \cdot \sigma_3 \cdot |\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i| \quad (7)$$

ここに k_1, k_2, k_3 は構造特性に依存するパラメータで次式のように与えられる。

$$k_1 = \frac{1}{n \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E(\alpha, \beta) \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta}, \quad k_2 = \frac{1}{n \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta}, \quad k_3 = \frac{1}{n \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta} \quad (8)$$

ここに n は単位面積を介して粒子間力を伝達する接点数、 $E(\alpha, \beta)$ は法線方向の確率密度。

さて(8)式中の $E(\alpha, \beta)$ は粒状体の体積要素に含まれる接点の方向分布を表わすものであるが、前節で述べた応力と粒子間力の関係式からすれば、粒子接点の方向分布を考えるべきなのは各要素面上においてであるので、(7), (8) 兩式を次のように修正する。

$$\bar{f}_{i1} = k_{p1} \cdot \sigma_1 \cdot \cos \beta_i, \quad \bar{f}_{i2} = k_{p2} \cdot \sigma_2 \cdot \cos \alpha_i \sin \beta_i, \quad \bar{f}_{i3} = k_{p3} \cdot \sigma_3 \cdot \sin \alpha_i \sin \beta_i \quad (9)$$

ここに

$$k_{p1} = \frac{1}{\bar{n}_1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E_{p1}(\alpha, \beta) \sin \beta \cos \beta \, d\alpha \, d\beta}, \quad k_{p2} = \frac{1}{\bar{n}_2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E_{p2}(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta}, \quad k_{p3} = \frac{1}{\bar{n}_3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} E_{p3}(\alpha, \beta) \sin \alpha \sin^2 \beta \, d\alpha \, d\beta} \quad (10)$$

ここに $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ はそれぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 面を介して力を伝達する単位面積当り接点数、 $E_{p1}(\alpha, \beta), E_{p2}(\alpha, \beta), E_{p3}(\alpha, \beta)$ はそれぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 面を介して力を伝達する接点における接平面の法線方向の確率密度関数である。ある方向の一つの平面を考え、これに関与している接点を選び出すときに、ある接点が選ばれる確率は一律ではなく、考えている面の法線方向へのその接点の法線の正射影とその接点と構成する粒子の粒径の積に比例しているので、 $E(\alpha, \beta)$ から $E_{p1}(\alpha, \beta), E_{p2}(\alpha, \beta), E_{p3}(\alpha, \beta)$ への変換は近似的に次式で行うことができる(ある特定の α, β において粒径が大きいのというようことはないと考える)。

$$E_{p1}(\alpha, \beta) = 4 E(\alpha, \beta) \cos \beta, \quad E_{p2}(\alpha, \beta) = 4 E(\alpha, \beta) \sin \beta \cos \alpha, \quad E_{p3}(\alpha, \beta) = 4 E(\alpha, \beta) \sin \beta \sin \alpha \quad (11)$$

$$\text{任意の粒子間力の大きさは} \quad |\vec{f}_i| = \sqrt{\bar{f}_{i1}^2 + \bar{f}_{i2}^2 + \bar{f}_{i3}^2} = \bar{f}_{i1} \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{f}_{i2}}{\bar{f}_{i1}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{f}_{i3}}{\bar{f}_{i1}}\right)^2} \quad (12)$$

非対称の場合には $\sigma_2 = \sigma_3$, $k_{p2} = k_{p3}$, $\bar{n}_2 = \bar{n}_3$ であるので簡単になって

$$|\vec{f}_i| = |\bar{f}_{i1}| \sqrt{2 \left(\frac{k_{p3}}{k_{p1}} \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\right)^2 + \cos^2 \beta_i}, \quad \text{よって} \quad |\bar{f}_{i1}|: \sigma_1 \text{ 方向に法線方向をもつ接点における粒子間力} \quad (13)$$

(9), (10) 式の妥当性については、光弾性模型実験と比較することによって検討できる。これについては講演時に述べる。

(1) 小田・小西：粒状体の粒子接点間力について，第30回土不学会年次学術講演会(昭50)，III-2

(2) Oda, M. (1972): The Mechanism of fabric change during compressional deformation of sand, Soils & F. Vol. 12

(3) Oda, M. (1974): A Mechanical and Statistical Model of Granular Material, Soils and Foundations. Vol. 14 No. 1