

信州大学工学部 正 員 荒木正久

同 上 正 員 富所五郎

信州大学大学院 学生員 小林三男

1. はじめに

有限要素法は、構造解析の手法として発展してきた数値解法である。しかし、その適用範囲は、一般の偏微分方程式の近似解法として、広く応用される可能性を持っている。それは、最近重み付き残差法 (Weighted Residual Method) の出現によって、変分原理の存在しない物理、工学の分野の問題まで有限要素定式化が可能となるからである。この意味で、ここでの有限要素は、変分原理の中に、重み付き残差法も含めて考える拡張された有限要素法を意味する。ここでは、その具体例として、非定常拡散方程式の有限要素法による数値解法について、述べることにする。

2. 基礎方程式

拡散場を表す支配方程式は、次のように表わされる。

$$\dot{\phi} + v_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} (D_{xk} \frac{\partial \phi}{\partial x_k}) + K_1 \phi - \phi_s = 0 \quad (1)$$

ここに v_k : 流速成分, D_{xk} : 拡散係数, K_1 : 減衰係数, ϕ_s : ある負荷量のソースまたはシンク
いま、場は二次元状態であるとし、流速、拡散係数等パラメータは、時間の関数 (例えば、 $D_x = D_x(t)$, $u = u(t)$ のように) であるとするれば、二次元状態における支配方程式は、次のようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} - \left(D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + K_1 \phi - \phi_s = 0 \quad (2)$$

3. 有限要素法

有限要素法の適用にあたり、重み付き残差法の一つである Galerkin 法によって、有限要素定式化を行う。この方法は、重み関数として形状関数を取る方法である。重み関数を W とし、これを (2) 式に乗じて、任意の領域について積分し、加え合わせることによって、次式を得る。

$$\int_V W \frac{\partial \phi}{\partial t} dv - \int_V W \left(u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} - D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + K_1 \phi \right) dv - \int_V W \phi_s dv = 0 \quad (3)$$

今、解析する領域を有限個の要素に分割し、その要素内で未知量 ϕ^e を次のように内挿近似する。

$$\phi^e = \phi_i N_i$$

ここに ϕ_i は要素の頂点における ϕ の値、 N_i は (x, y) の多項式で表わされる形状関数である。この例では、要素としては、3節点三角形要素、形状関数としては、一次の多項式を用いるものとする。

すなわち

$$N_i = \frac{1}{2d} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (4)$$

$$\text{ここに } a_i = x_j y_k - y_j x_k, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j, \quad 2d = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

また、要素内の流速も、節点流速、形状関数を用いて、 $u^e = u_i N_i$ のように表現されるとすれば

(3)式は、次のように表わされる。

$$\{\phi\} \left(\{N\} \left[\frac{\partial [N]}{\partial t} + u_k N_k \frac{\partial [N]}{\partial x} + v_k N_k \frac{\partial [N]}{\partial y} - D_x \frac{\partial^2 [N]}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 [N]}{\partial y^2} + K_1 [N] \right] dv - \{\phi\} \int_V [N] \phi_s dv = 0 \quad (5) \right.$$

形状関数が二階微分まで表現し得ないことを考え、部分積分によって微分次数を下げ、さらに境界条件を考慮し、若干の変形後、次のようなマトリックス方程式が得られる。

$$[C] \{\dot{\phi}\} + [K] \{\phi\} = \{F\} \quad (6)$$

ここに、マトリックスの成分は、次のように表わされる。

$$C_{ij} = \int_V N_i N_j dv \quad (7.1)$$

$$K_{ij} = \int_V \left(u_k N_k \frac{\partial N_i}{\partial x} + v_k N_k \frac{\partial N_i}{\partial y} + D_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + D_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + K_1 N_i N_j \right) dv \quad (7.2)$$

$$f_i = \int_V N_i \phi_s dv + \int_s N_i \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (7.3)$$

ここで K_{ij} は構造問題における要素剛性マトリックス、 f_i は荷重項ベクトルに相当するものである。また要素剛性マトリックスの評価においては、面積座標による表現が簡単で便利である。以上が作成されるのは、構造問題の有限要素法プログラムの一部を改造して、そのまま用いることができる。ただし K_{ij} は、はじめの二項のために、非対称マトリックスとなることに注意する必要がある。

4. 時間微分項

時間微分 $\{\dot{\phi}\}$ に対しては、時間軸方向に、一次の差分近似による方法、漸化式を用いる方法により五式を考えた。前進、後退、中央差分の Explicit Scheme により、次の三式が考えられる。

$$\text{前進差分} \quad \left[\frac{1}{\Delta t} [C] \right] \{\phi\}_{t+\Delta t} = \left[\frac{1}{\Delta t} [C] + [K] \right] \{\phi\}_t + \{F\} \quad (8.1)$$

$$\text{後退差分} \quad \left[\frac{1}{\Delta t} [C] + [K] \right] \{\phi\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [C] \{\phi\}_t + \{F\} \quad (8.2)$$

$$\text{中央差分} \quad \left[\frac{1}{\Delta t} [C] + \frac{1}{2} [K] \right] \{\phi\}_{t+\Delta t} = \left[\frac{1}{\Delta t} [C] - \frac{1}{2} [K] \right] \{\phi\}_t + \{F\} \quad (8.3)$$

漸化式による方法では、次の二式を考えた。

Wilson と Clough により、安定で精度のよい方法が提案されており、それによれば

$$\{\dot{\phi}\}_{t+\Delta t} = (\{\phi\}_{t+\Delta t} - \{\phi\}_t) \frac{2}{\Delta t} - \{\dot{\phi}\}_t$$

とする時

$$\left[\frac{2}{\Delta t} [C] + [K] \right] \{\phi\}_{t+\Delta t} = [C] \left\{ \frac{2}{\Delta t} \{\phi\}_t + \{\dot{\phi}\}_t \right\} + \{F\} \quad (8.4)$$

また重み付き残差法を時間軸方向にも用いる方法により、時間に関して、一次の形状関数を用い、次式で、漸化式が与えられる。

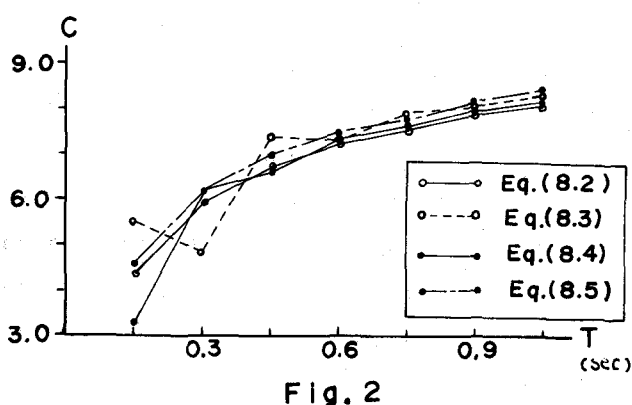
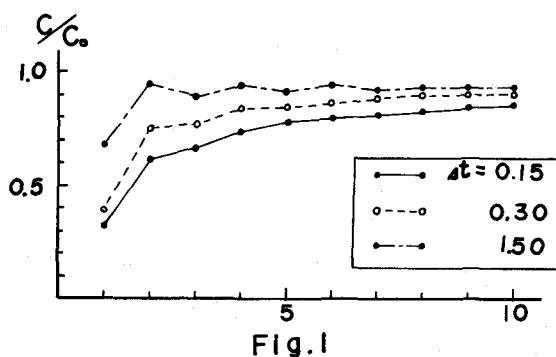
$$\left[\frac{1}{\Delta t} [C] + \frac{2}{3} [K] \right] \{\phi\}_{t+\Delta t} = \left[\frac{1}{\Delta t} [C] - \frac{1}{3} [K] \right] \{\phi\}_t + \{F\} \quad (8.5)$$

(8.1) ~ (8.5) 式より、いずれも同様な式形をしており、係数が異なるだけであることがわかる。以上の差分式、漸化式を用い、時刻 $t=0$ における初期値 $\{\phi\}_0$ 、時間ステップ Δt が与えられるば、後は、時刻 $t=n \cdot \Delta t$ において、上式のマトリックス方程式を解くことにより、未知数 $\{\phi\}$ が順次決定される。

5. 解析結果と考察

有限要素定式化、差分式、時間ステップ Δt について検討するために、まず一次元問題を扱った。以下に示す例は、いづれも $u = 2.0 \text{ m/sec}$, $Dx = 10.0 \text{ m}^2/\text{sec}$, $k_1 = 0.01$, $\phi_0 = 0.0$ として解析しており、解析に用いた領域は $Lx = 201.0 \text{ m}$, $Ly = 6.0 \text{ m}$ で、 x 方向には、33 節点、 y 方向には 3 節点、合計 99 節点とし、拘束点 (ϕ の値が与えられる節点) 附近では、メッシュを細かく組んだ。図 1 は、(8.4) 式を用い Δt を変えた時の解の収束の様子を示したものである。ここで N はくり返し回数、 C は計算された値、 C_0 は拘束節点での値で、 C/C_0 によって無次元化してある。図 2 は (8.1) ~ (8.5) 式を用い $\Delta t = 0.15 \text{ sec}$ とした時の、拘束点に最も近い節点の解の収束を示したものである。 T は時間 (sec) である。表-1 は理論値との比較で、 $\Delta t = 0.15 \text{ sec}$ とし $t = 1.05 \text{ sec}$ における、各節点の計算された値を示してある。

以上より次の事がわかる。図 1 より Δt の取り方については、 Δt が小さい程解の振動が小さい。また Δt の取り方としては、流れが代表的な要素を横切る



Node	(8.1)	(8.2)	(8.3)	(8.4)	(8.5)	Ana.
5	1.22×10^6	8.12	8.28	8.16	8.22	8.16
8	-1.01×10^6	6.19	6.42	6.26	6.36	6.64
11	1.98×10^6	4.46	4.72	4.47	4.64	5.13
14	-8.09×10^5	2.93	3.11	2.87	3.05	4.05
17	9.22×10^5	1.90	1.97	1.75	1.84	3.19
20	-2.68×10^6	1.09	1.05	0.89	1.06	2.49
23	1.98×10^6	0.64	0.56	0.45	0.58	1.93
26	-3.07×10^6	0.31	0.21	0.16	0.25	1.48

Tab. 1

時間とするのが妥当で、この例では $\Delta t = L^2/\alpha = 3.0/2.0 = 1.5 \text{ sec}$ である。しかしこの例では、図1
 がわかるように、立ち上りの部分で、解が振動する傾向がある。この理由としては、一次式による
 単純なスキームによるためであると思われる。さらに高度なスキームによる改良が必要であろう。また
 取り方としては、中央値が大きく変化するような、くり返しの最初の段階では、小さく取る必要
 があり、後になって、流れが代表的な要素を横切る時刻になれば、解の安定性、計算時間の短縮の上
 からも有利ではないかと思われる。

次に差分式、漸化式による比較であるが、図2より次の事がわかる。まず(8.1)式の前進差分
 スキームを用いたものは、時間に関しても、空間に関しても、解が発散し、結果が得られなかった。

(8.3)式の中点差分スキームによるものは、立ち上りの部分で解が振動する傾向が見られた。他の方
 式によるものは、だいたい収がよった解の傾向を示す。またどの方法によっても、時間が経過するに
 したがって、解がよくなるようになる(表1参照)。これより差分式、漸化式を取り方としては、解
 の安定という面からは、(8.2)式の後退差分、(8.5)式の時向軸方向にも重み付き残差法を用いた式
 が有利であろうと思われる。

表1は、理論値との比較を示したものである。これより、拘束点附近では、解がよく一致している
 が、拘束点から遠ざかるにつれて、解析値の値が小さくなる。この理由としては、解析では
 $\partial p / \partial n = 0$ としているのであるが、実際は勾配がもう少し大きい、つまり $\partial p / \partial n \neq 0$ であるからでは
 ないかと思われるが、このことに対しては、今後さらに検討する必要がある。

6. 終りに

非定常拡散の有限要素法による数値解法について述べてきたが、実際の問題にあたっては、解析は
 もっと複雑である。拡散場は、時間的、空間的に変化する流達、拡散係数、減衰係数に大きく依存し
 ており、これらの値を決定し、解析に取り込むにあたっては、注意を要する。ただ単にインプットと
 アウトプットというだけでなく数値を持つ物理的意味を十分に把握することが大切である。また有限
 要素法という面から見れば、さらに高度な要素と形状関数による改善、高度な差分式、漸化式によ
 る改善などが今後の課題である。そして、これらの方法が完成できれば、いわゆる環境アセスメント
 の手法として、有効な手段になり得ると思う。なお、本計算には信州大学データステーションを通
 じ東大大型計算機を用いた。

7. 参考文献

- Yozniuk et.al "Hydrothermal Analysis by Finite Element Method"
 J.O.H.D., ASCE, Vol. 98, No. HY11, 1972 pp1983-1998
- Yozniuk et.al "Transient Hydrothermal Analysis of Small Lakes"
 J.O.P.D., ASCE, Vol. 99, No. P02, 1973 pp349-364
- Oden J.F. "Finite Elements of Continua"
 Vol. 1, Vol. 2 John Wiley 1982
- Timoshenko C.C. "The Finite Element Method in Engineering Science"
 McGraw-Hill 1971