I－9

単純支持された矩形板の特異点法と群荷重法による解析

岐阜大学　大学院　学生会員　○松浦良和
岐阜大学　工学部　正会員　　中川建治

1.まえがき：集中荷重が載荷されて弾性変形する平面板の載荷点近傍の断面力や着目点近傍の断面力影響面は，微分方程式の特異点のような形状を示して，一般の級数解等ではその点近傍において精度の良い解を得られない。Pucher[1]の提唱した特異点法は，このような特異点状の影響面の解析上の難点を微分方程式の特異解的な扱いによって克服したものである。本研究は無限平板に集中荷重あるいは円形荷重が載荷された場合の特異曲面と，周辺の単純支持条件を作り出す荷重群（これを群荷重と称する）とを組合わせて周辺で単純支持された矩形板を解いたものである。

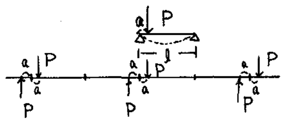
2.特異曲面の解析：Pucherの方式に従って集中荷重Pが載荷される無限板の特解として，

$w=Pr^2\log r^2/16\pi N$ を用いる．これは境界条件を満足していない。また原点を中心として半径aの円内では等分布荷重pを受けて円外では無載荷という円形荷重が無限平板に載荷されたときの特解として，次のものを用いる。

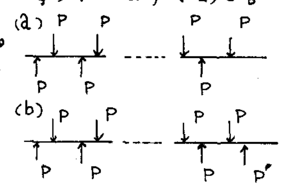
$w_i(r)=pr^4/64N$　　　　（円内）　　　…………(1)

$w_o(r)=pa^4[5+4\log(r/a)-4(r/a)^2+4(r/a)^2\log(r/a)^2]$　　（円外）　　…………(2)

3.群荷重法：単純支持されたスパンlの梁が外力Pを受けて変形する場合を例として説明する。このたわみ曲面と断面力は宙に浮いた無限梁が$2l$を一周期としたP，-Pの外力を受けて変形している場合の半周期lのたわみと断面力で表わされる。もし集中力P１個が無限梁に作用したときのたわみと断面力の状態（影響線）が得られているならば，±Pを対にして周期$2l$づつ重ねてゆくとこの解が得られるはずである。



しかし±Pをくり返し作用させて有限で中止すると次の不合理さが現われる。(a)図のように左端は-P，右端は+Pで打切ると鉛直方向の釣合は成立するが回転釣合は成立しない。他方(b)図の場合，左端をそのままにして回転釣合を満足させるようにP'を加えると，鉛直釣合が乱れて静止できない。上の二つの矛盾を解決するために，次のような一群の荷重を設定して，群荷重と定義する。

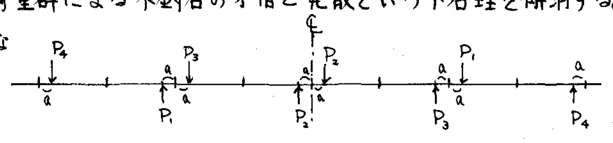


① 複数個の荷重P_iを１群としたもので，この群に属する荷重P_i（$i=1,k$）で鉛直釣合と回転釣合が成立する。

② この群荷重を$x=\pm\infty$方向へ一定間隔で逐次重ねてゆくことによって，±Pのくり返し荷重を再現する．しかし，左右の先端部では±Pの大きさにならなくてもよい。

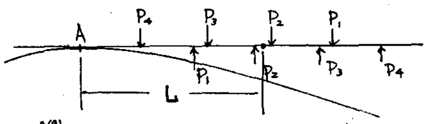
③ 群荷重の１つが宙に浮いている無限梁に作用すると，梁の$x=\pm\infty$部分のたわみは０になる。

このような条件をもつ群荷重は，有限荷重群による不釣合の矛盾と発散という不合理を解消する。そこで８個の荷重を一群とする，次のような群荷重を設定する。



$$P_1=P(2\ell-a)(3\ell-a)(4\ell-a)/120\ell^3 \quad ; \quad P_2=P\cdot 3(2\ell+a)(3\ell-a)(4\ell-a)/120\ell^3$$
$$P_3=P\cdot 3(2\ell+a)(\ell+a)(4\ell-a)/120\ell^3 \quad ; \quad P_4=Pa(\ell+a)(2\ell+a)/120\ell^3 \qquad \cdots (3)$$

この群荷重は中心に関して鉛直釣合も回転釣合も成立している。さらに2ℓづつ$x=\pm\infty$方向へ平行移動して重ね合わせると左右端の6個づつの荷重は$\pm P$にはならないが、これらより内側の荷重はすべて$\pm P$の群を形成するので①,②の条件を満足している。この群荷重による無限点のたわみは、着目点Aの影響線を仮に$f(x)$としてどのようになるであろうか。A点よりLの点にこの群荷重の中心を据えると、Aへの影響値$y(A,L)$はTaylor展開を行なうと次のようになる。



$$y(A,L)=P_2\{f(L+a)-f(L-a)\}-P_3\{f(L+2\ell-a)-f(L-2\ell+a)\}$$
$$+P_1\{f(L+2\ell+a)-f(L-2\ell-a)\}-P_4\{f(L+4\ell-a)-f(L-4\ell+a)\}$$
$$=-2Pa(\ell-a)(\ell+a)(2\ell+a)(2\ell-a)(3\ell-a)(4\ell-a)f^{(7)}(L)+\varepsilon f^{(9)}(L)+\cdots \qquad (4)$$

$y(A,L)$は$f(L)$の第6次導関数までに無関係になり、$f(x)$が7次以上の多項式や他の関数で表わされる場合でも微小項にしか影響されない。従って、$f(x)$が$x=\pm\infty$で極をもつ関数でも$f^{(7)}(x)$が$x\to\pm\infty$で0に収束するならば、$\pm P$の荷重列を群荷重で表わすとA点から遠い点の$\pm P$は適当に省略しても、A点に実質的に影響はないことになる。このようにして設定した群荷重は③の条件を満たす。計算では$\ell=\frac{a}{2}=\frac{1}{2}$としてこの群荷重を5組$2\ell$づつ平行して重ねたものを群荷重$B_1$(16個の荷重)、7組のものを群荷重$B_2$(20個荷重)、11組のものを群荷重$B_3$(28個の荷重)として用いた。二辺で単純支持された帯状板は、一つの群荷重を無限板の特異曲面に載荷すれば解析できる。これに対して周辺で単純支持された矩形板を解析するには、例えば群荷重B_1の場合、x軸方向に平行にその荷重個数だけ載荷し、各々のB_1のx軸上の荷重がx軸方向にB_1となるように重みをつけてたわみや断面力の特異解に対して使用するのである。

4.考察

1) Fourier級数解はたわみに対して収束は良いが、曲げモーメントやせん断力に対して、特に集中力が作用する近傍の断面力を求めるのに収束は悪い。しかし群荷重法は曲げモーメントやせん断力という板や梁の設計に最も必要な断面力に対して収束が良く、集中力;分布力を問わず力の急変点近傍の応力勾配を計算するのに適した方法である。

2) 板や梁の微分方程式の非同時解さえ求められるならば、この曲面が無限点に極をもつものでも影響関数として採用し得るから、群荷重の重みつき総和法はFourier級数の総和法に対応していよう。

3) この解法は無限帯状板から、周辺が単純支持された矩形板にも適用できる。さらに荷重は集中力だけでなく、円形分布荷重、矩形分布荷重、線状分布荷重等にも適用できる。計算結果から群荷重は荷重が増すほど精度の良いものであることがわかる。

〈単純支持された正方形板集中荷重載荷点のたわみ〉

Fourier級数解	群荷重B_1	群荷重B_2	群荷重B_3
0.01160	0.01159682	0.01160083	0.01160084

5.参考文献

1) A. Pucher; Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten, Ingenieur archiv, Band XII, 1941

2) Olsen, H. und Reinitzhuber, F.; Die zweiseitig gelagerte Platte, W. Ernst and Sohn, 1. Bd. 1950 (2. Aufl.), 2. Bd. 1951

3) Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S.; Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959.