

梁支持された矩形板の支桌近傍の断面力の解析

岐阜大学 工学部 学生会員 の長瀬 裕信

正会員 中川 建治

(1) まえがき 弾性平板に集中荷重を作用させると、載荷桌近傍の断面力分布、あるいは着目桌近傍の断面力影響面は特異性を示し、一般の級数解や F.E.M 等によつては、その桌近傍では精度のよい解が得られない。他方、Pucher は 1938 年に、このような特異桌状の影響面の解析上の難点を微分方程式の特異解的な扱いによつて克服する方法を發表した。本論文は、この特異解法を利用して梁支持された矩形板の、特に、支桌近傍の断面力を解析したものである。

(2) 特異解法による解法 (等分布荷重) 集中荷重 P を受ける板のために関する微分方程式 $\nabla^2 W = \frac{P}{D}$ の特殊解は、 $W = \frac{P}{8\pi D} r^2 \log \frac{r}{a}$ という特異曲面であり、一般解はこれに同次解 (重調和関数) を重ね合わせて境界条件を満足するようにしたものである。筆者等は先に、この特異解を支桌反力に対する特異解という形で採用して、図-1 に示すように左右の支つで梁支持された矩形板が等分布荷重を受ける場合の解法一計算例を示した。

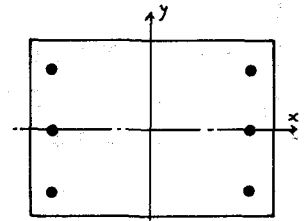


図-1 支

この場合、同次解として x, y の多項式を、等分布荷重による特殊解には x の 4 次式を用い、支桌のため $W=0$ 、周辺では選定法により、境界条件を満足させた。その結果、周辺の W と W の値とを比較して、 M_x では 15%、 M_y では 10% となった。さらに周辺の選定を増したり、同次解に三角関数、双曲線関数を採用して検討してみたが、周辺 (自由辺) のと合せに関してより良好な結果は得られなかった。自由辺近傍に支桌 (特異性) が存在するため、ただ同次解を重ねることのみによつては、支桌近傍曲面の特異性をうまく吸収できなかったためと考えられる。

(3) 改良された特異曲面による解法 (2) で述べたように、自由辺近傍に支桌がある場合、と合せは、あまり良好ではないので、自由辺上に集中荷重が載荷したときの改良された特異曲面をフーリエ積分で求めた。(図-2 参照) すなわち、任意の偶関数 $R_x(y)$, $M_x(y)$ をそれぞれ $x=y$ 線上の反力と曲げモーメント分布とする $\nabla^2 W(x, y) = 0$ の解で、 $x \geq y$ の半平面上で極をとるような解 (たわみ曲面) を求めると、つぎのような解が得られる。

$$W(x, y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi} (3+\nu)(1-\nu)N} \left[\int_0^y \left\{ \frac{-(1+\nu)}{t^2} + \frac{(1-\nu)}{t} x \right\} e^{-\frac{x^2}{t^2}} M(t) \cos y t dt + \int_0^y \left\{ \frac{-2}{t^3} - \frac{(1-\nu)x}{t^2} \right\} e^{-\frac{x^2}{t^2}} W(t) \cos y t dt \right]$$

$$M(x) = \mathcal{F}[M_x(y)], \quad W(x) = \mathcal{F}[R_x(y)]$$

この式をもとにして、集中力 P が原点に作用した場合の特異解 $\frac{P}{8\pi D} r^2 \log \frac{r}{a}$ の y 線上の曲げモーメント M と反力 R を 0 にするたわみ曲面、すなわち、 y 軸が自由辺で原点下向きに P が作用する場合のたわみ曲面で、他の境界条件を満足してはいるもの

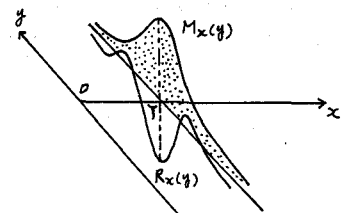


図-2

求得される。

$$N(x, y) = \frac{P}{(3+\mu)(1-\mu)\pi N} \left[-\frac{\mu r^2}{2} \log r^2 + \frac{(1+\mu)}{2} y^2 \log r^2 + (1+\mu)xy \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{(1-\mu)}{2} x^2 \right]$$

この求めた自由边上に集中力 $P_i = X_i$ が作用するときの特異曲面を交点 1~6 に重ね合わせる。すなわち、 x 軸、 y 軸対称であることから、交点 1, 3, 4, 6 では交点反力 X_1 、交点 2, 5 では交点反力 X_2 と考える。等分布荷重による特殊解は、 y 軸対称であることから

$$W_0 = a_1 + a_2 x^2 + \frac{P}{8N} x^4$$

としてよい。同次解部分は、 x, y の多項式とし、この 3 つの解を重ね合わせて、境界法で境界条件を満足するように X_1, X_2, a_1, a_2 、同次解の係数を決定する。境界条件は、対称性を考慮して図-3 の 4 分の 1 部分を考える。

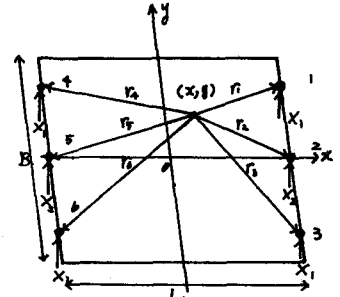


図-3 交点

- (i) 各交点で $N = 0$
- (ii) $x = 0.5$ の交点で $M_x = 0, V_x = 0$
- (iii) $y = 0.5$ の交点で $M_y = 0, V_y = 0$

そして、交点反力と等分布荷重との釣り合いから

$$(iv) \quad 4X_1 + 2X_2 - P = 0 \quad \text{となる。}$$

同次解は次の x, y の多項式を用いた。
 $W_1 = y^2 \quad W_2 = x^2 - 3x^2y^2 \quad W_3 = y^2 - 3x^2y^2$
 $W_4 = x^6 - 10x^4y^2 + 5x^2y^4 \quad W_5 = y^6 - 10y^4x^2 + 5y^2x^4 \quad W_6 = x^8 - 21x^6y^2 + 35x^4y^4 - 7x^2y^6$
 $W_7 = y^8 - 21y^6x^2 + 35y^4x^4 - 7y^2x^6 \quad W_8 = x^{10} - 36x^8y^2 + 126x^6y^4 - 84x^4y^6 + 9x^2y^8$
 $W_9 = y^{10} - 36y^8x^2 + 126y^6x^4 - 84y^4x^6 + 9y^2x^8 \quad W_{10} = x^{12} - 55x^{10}y^2 + 330x^8y^4 - 462x^6y^6 + 165x^4y^8 - 11x^2y^{10}$
 $W_{11} = y^{12} - 55y^{10}x^2 + 330y^8x^4 - 462y^6x^6 + 165y^4x^8 - 11y^2x^{10}$
 $W_{12} = x^{14} - 78x^{12}y^2 + 715x^{10}y^4 - 1716x^8y^6 + 1287x^6y^8 - 286x^4y^{10} + 13x^2y^{12}$
 $W_{13} = y^{14} - 78y^{12}x^2 + 715y^{10}x^4 - 1716y^8x^6 + 1287y^6x^8 - 286y^4x^{10} + 13y^2x^{12}$

(3) 計算例- 考察 等分布荷重満載 ($\rho g y = 4 = 0.3$) 周辺交点数 7 点、17 元連立方程式となった。周辺の値と中心値との誤差は、板中央の値と比較して、 M_x では 4.7%、 M_y では 0.3% となり、(2) で述べた場合とくらべて良好な結果を得、交点反力については表-1 の値を得た。また本計算の場合、交点近傍の断面力 (M_x, M_y, Q_x, Q_y) の特異性が従来の級数解や、有限要素法、差分法などよりも、精度よく表現できたので、これを当日発表する。さらに、交点が自由辺内部にある場合 (図-1) の改良された特異曲面を得ているし、交点反力の影響面も精度よく得られるものと期待できる。

交点反力	X_1	X_2
0.5	0.1485	0.2029
1.0	0.1679	0.1642
2.0	0.1891	0.1217

表-1 等分布荷重満載 $V=0.3$
8×板面積 = 1 とする

(4) 参考文献

- ① A. Packer: Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten, Ingenieur-archiv 1991.
- ② 長瀬・中川; 土木学会中部支部発表会概要 1976年1月