

名古屋工業大学 正 員 長谷部宣男

名古屋工業大学 学生員・長谷川 久

1. まえがき 円周方向に切欠きを持つ変断面棒のねじり問題は古くから多くの解析がなされている。しかしながら、それら解析結果にはかなりの差がある(図-2)。そこで本報告においては、この問題を、変断面の複雑な形状を等角写像関数で単位円に写像し、基礎微分方程式の解法には差分法を用いて解析した。写像関数により複雑な形状が格子点にのるため、過去浜田らによる同様の方法を用いた解析結果もあるが、ここでは一般化しやすい単位円への写像関数を用いて解析した。

2. 基礎微分方程式 等角写像関数を用いたのちの基礎微分方程式を、 (P, θ) 極座標表示すると、単位円内において

$$\frac{\partial F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{3}{r} \left(\frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (1)$$

単位円周上において

$$F = \text{Constant} \quad (2)$$

となり、この問題は上二式を満たす応力関数 F を求めることに置き換わる。応力は、この応力関数を利用して次式から求めることができる。

$$\tau_{\theta\rho} = -\frac{k^2}{\rho r^2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial r}{\partial \theta} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \rho} \right\} \quad (3-1)$$

$$\tau_{\rho z} = \frac{k^2}{r^2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \rho} \frac{\partial r}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right\} \quad (3-2)$$

$$\text{ただし } \frac{1}{k^2} = \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2, \quad \xi = \rho \cos \theta$$

3. 解析とその結果 解析には前述のごとく差分法を用いた。なお、差分近似としては第1次近似までとった。ここでは、対称性が利用できるため、図-1のハッチの部分、すなわち、写像された単位円の4分の1の部分について解析した。4分の1単位円を θ 方向に15等分、 ρ 方向に10等分して解析した結果、図-1に示す応力分布(切欠きから十分離れた部分における $\tau_{\rho z}$ の応力値を1.0とする)が得られる。

つぎに、切欠き底部における応力の集中をみるため、応力集中係数 K_t を

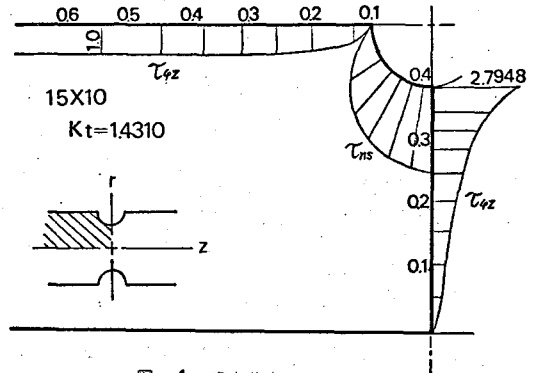


図-1, 応力分布

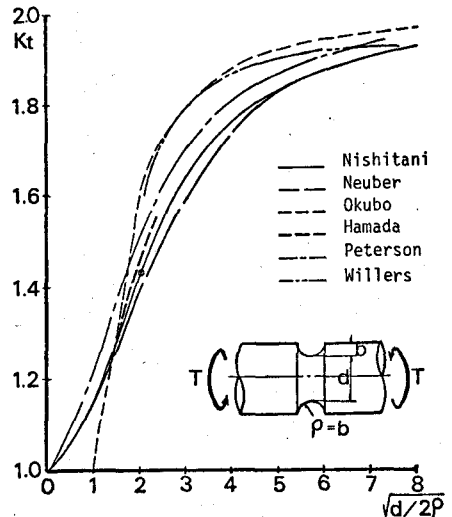


図-2
(文献1より)

$$K_t = \frac{\tau_{42}^*}{\tau_0} \quad (4)$$

ただし τ_{42}^* : 切欠き底部での $\tau_{42}(=\tau_{hs})$ の値

τ_0 : 切欠き底部の半径の丸棒を同じ大きさのネジリモーメントでねじったときの τ_{42} の値

という式で与えるとする、応力集中係数 K_t の値は分割の仕方によって多少変動する。それを図示すると、 ρ 方向の分割に対しては、図-3、 θ 方向の分割に対しては、図-4 のようになる。

まず、 ρ 方向の分割と応力集中係数は、図-3 から明らかなように線形関係があることがわかる。これは、差分近似として第1次差分までしか取らなかったことによるとと思われる。すなわち、真の応力関数値 F と、差分近似値 $\bar{F}$ が、次のような関係を持つからだといえる。

$$F = \bar{F} + O\{(\Delta\rho)^2\} \quad (5)$$

ゆえに、我々はこの関係を利用して $\Delta\rho \rightarrow 0$ (ρ 方向の分割無限大) としたときの K_t が外挿できる。

一方、 θ 方向の分割と K_t との関係は図-4 に示されるように、 ρ 方向の分割のときのような、単純な変化をしないで K_t の値は互いに 0.5% 足らずの間において振動している。これは θ の変化による周上の格子点の位置の変化が複雑なため生じると考えられる。しかし、図-4 を注意深く観察すると、切欠き部分に入って最初の周上の格子点の位置が同じである分割法による K_t の値を結べば (図-4 の破線)、ほぼ $(2\Delta\theta/\pi)^2 = 0$ なる線 (K_t 軸) 上で交わることがわかる。横軸に $(2\Delta\theta/\pi)^2$ を取ると直線が K_t 軸上で交わるということは式(5)の考えによって説明され得る。この事実により、各々の場合において $2\Delta\theta/\pi \rightarrow 0$ (ρ 方向分割一定 θ 方向の分割無限大) の K_t が外挿される。

以上2つの事実から、我々が求めたい $\theta \cdot \rho$ 両方向の分割を無限大にしたときの K_t は、任意の $\Delta\rho$ における $(2\Delta\theta/\pi)^2$ による K_t の変化から $\Delta\theta \rightarrow 0$ の時の値を外挿し、その値に図-3 から求まる $\Delta\rho$ から $\Delta\rho \rightarrow 0$ までの変化値を加えることにより求めることができる。と結論できる。

4. 結論 いま、図-1 のような断面をもつ変断面棒を、以上の方法により解析すると $K_t = 1.4346$ という結果が得られる。これは、今まで多くの人によりなされた結果 (図-2) 中では丸印でプロットした位置になる。今後、この方法により写像関数を変えるだけで、変断面棒のネジリ問題は、いろいろの場合について解析することができるとと思われる。

<参考文献>

- (1). H. Nishitani "A Method for Calculating Stress Concentrations and Its Applications"
Strength of structure of solid materials a Joint Japan-U.S.A. Seminar edited by H. Miyamoto et al. P. Noodhoff 1974
- (2). 浜田, 北川, 宮田 "写像関数を利用する2次元弾・塑性問題の数値解法" 日本機械学会論文集 33巻 256号 昭-42

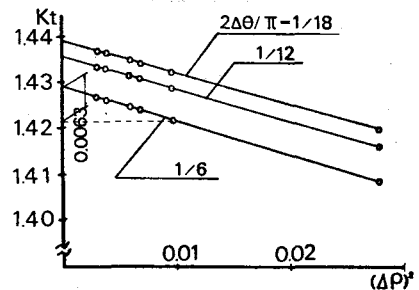


図-3, ρ 方向の分割と応力集中係数

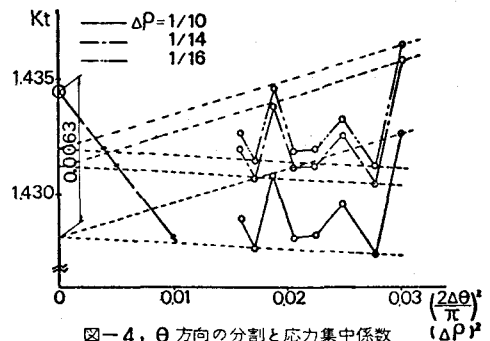


図-4, θ 方向の分割と応力集中係数