最大化問題による均衡交通流推定に関する一方法

岐阜大学工学部　正員　加藤晃
岐阜大学工学部　正員　宮城俊彦
岐阜大学工学部　学生員○右倉徹夫

1. 概説

交通量予測において，従来の4段階推定法とはべつに，以前から交通サービスの需要と供給の関係から需要推計をとらえようとする試みがなされてきた。本研究は，この需要・供給均衡理論に基づいて，交通輸送システムに関係した需要とサービスの変数をもつ関数を最大化することにより，唯一の均衡解を求め，この手法を一般的なネットワークに拡張し，また，理論的検討を行なおうとするものである。

2. モデルの定式化

解析を進めるにあたり，ネットワーク，交通量等の諸量を定義する。ノードi，jはセントロイドとし，V_{ij}はリンクi-jの交通量，V_{ij}^kは目的地がノードkである交通量とする。

$$V_{ij} = \sum_k V_{ij}^k \qquad V_{ij}\ ,\ V_{ij}^k \geq 0 \tag{1}$$

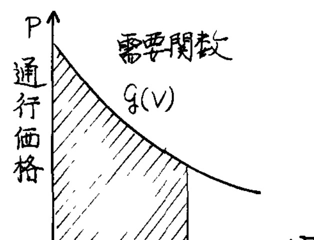
V_i^kは発生ノードi，目的地ノードkの発生交通量である。

$$V_i^k = \sum_{\{a_i\}} V_{i,\{a_i\}}^k - \sum_{\{b_i\}} V_{\{b_i\},i}^k \tag{2}$$

$\{a_i\}$；iからの隣接ノードの集合
$\{b_i\}$；iへ向う隣接ノードの集合

式(2)は流出交通量から流入交通量を引いたものである。ここで，需要関数と供給関数を設定する。V_i^kはサービス水準によって表わされる．サービス水準は一般的には時間，所要費用，快適さ等を含んだ通行価格として表わされるが，ここでは代表として通行時間（t）を考える。

$$V_i^k = d_i^k(t_i^k) \qquad t_i^k \geq 0 \tag{3}$$



図－1

t_i^kはノードiからkまでの通行時間である。また，d_i^kは単調減少関数であり，逆関数を設定する。

$$t_i^k = \{d_i^k\}^{-1}(V_i^k) = g_i^k(V_i^k) \tag{4}$$

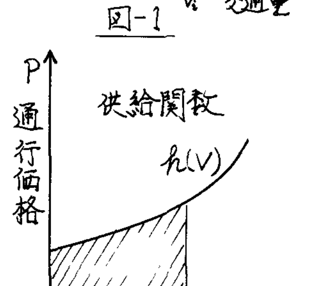
リンクi-jにおける交通量と通行時間との関係は，供給関数として表現され，関数$h(V)$は単調増加関数である。

$$t_{ij} = h_{ij}(V_{ij}) \tag{5}$$

いま，通行時間に対し，Wardropの第一原理（等時間フロー）を適応すると以下のようになる。

$$g_i^k(V_i^k) - g_j^k(V_j^k) = h_{ij}(V_{ij}) \qquad V_{ij}^k > 0 \tag{6}$$

$$g_i^k(V_i^k) - g_j^k(V_j^k) \leq h_{ij}(V_{ij}) \qquad V_{ij}^k = 0 \tag{7}$$



図－2

そして，Beckmanによる均衡問題の目的関数は次式で与えられる。

$$H(V) = \sum_m \sum_\ell \int_0^{V_m^\ell} g_m^\ell(x)\cdot dx - \sum_m \sum_n \int_0^{V_{mn}} h_{mn}(x)\cdot dx \tag{8}$$

$\mathbf{V}$は要素としてすべての$V_{i,j}^k$をもつとする。また，Beckmannは式(8)の最大化が均衡解をもつこととと等価であるといっている。いま，式(8)の傾き成分は以下のようになる。

$$\frac{\partial H}{\partial V_{i,j}^k} = g_i^k(V_i^k) - g_j^k(V_j^k) - h_{i,j}(V_{i,j}) \qquad (9)$$

式(6)，(7)，(9)は均衡状態で次のことを意味している。

$$\frac{\partial H}{\partial V_{i,j}^k}=0 \quad V_{i,j}^k>0 \qquad (10) \qquad\qquad \frac{\partial H}{\partial V_{i,j}^k}\le 0 \quad V_{i,j}^k=0 \qquad (11)$$

ここで，この関係を一般的に拡張して図-3のように中間ノードを含むネットワークの交通を考えてみる。$i\to l\to j\to k$の交通を考え，この交通量を$V_{i,l,j}^k$と表わす。式(8)，(9)とWardropの第一原理より

$$\frac{\partial H}{\partial V_{i,l,j}^k} = g_i^k(V_i^k) - g_j^k(V_j^k) - h_{i,l}(V_{i,l}) - h_{l,j}(V_{l,j}) \qquad (12)$$

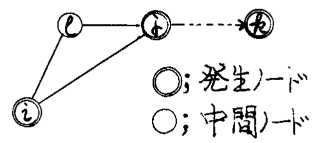


図-3

式(12)より，各交通量$V_{i,l}^k$，$V_{l,j}^k$が求められることは当然である。i，jはかならず発生ノードでなければならない。さらに，式(8)のもつ意味を考えてみると，$\int_0^{V_m^l} g_m^l(x)\,dx$は図-1の斜線の部分に相当し，$\int_0^{V_{m,n}} h_{m,n}(x)\,dx$は図-2の斜線部分である。そして，Beckmannは均衡状態下で次のことが成立していると指摘している。

$$\sum_i\sum_k g_i^k(X)\cdot X_i^k = \frac{1}{2}\sum_i\sum_j h_{i,j}(X)\cdot X_{i,j} \qquad (13)$$

式(13)において，左辺はtrip costであり，右辺はtransportation costを意味する。いま，図-4の斜線部分は経済学でいう消費者余剰の部分に相当する。式(8)，(13)より

$$H(\mathbf{V}) = \sum_m\sum_l \int_0^{V_m^l} g_m^l(x)\cdot dx - \sum_m\sum_n h_{m,n}(X)\cdot X_{m,n} \qquad (14)$$

式(14)を最大化することは消費者余剰を最大化するネットワークを作ることと等価である。

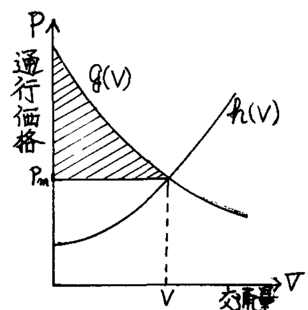


図-4

3. 分布交通量固定の場合

いま，式(8)において分布交通量を固定すると（これをV_0とする），$\int_0^{V_m^l} g_m^l(x)\cdot dx$は一意的に定まり，関数$H(\mathbf{V})$の最大化は$\sum_m\sum_n\int_0^{V_{m,n}} h_{m,n}(x)\cdot dx$の最小化となる。このことは，従来の等時間配分と同じ問題に変換されたことを意味する。また，式(14)は$\sum_m\sum_n h_{m,n}(X)\cdot dX$の形となり，総費用最小化問題になる。この関係から，仮の需要関数（$g(V)|_0$）を設定し，図-5に示すような計算を行なう。つまり，図-5(IV)の計算によって各交通量がある値まで安定した後，需要関数を図-6のように通行価格にそって上下にシフトさせていく繰り返し計算によって，等時間配分，費用最小化配分と同等のネットワークを作り出すことができる。

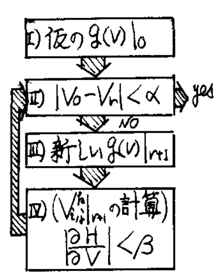


図-5

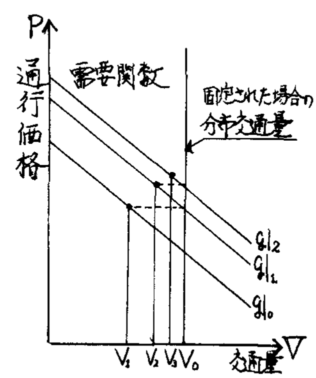


図-6

4. モデルの検討及び計算

今，次のように模擬ネットワークを作り，諸係数を以下のように定める。また，リンク[3]を含まないものをネットワーク1，含む場合を，ネットワーク2とする。需要・供給関数はともに線型とし，需要の弾力性は一定と仮定する。

需要関数　$G_i^k(V_i^k)=a_i^k-bV_i^k$　　$b=0.1$

供給関数　$h_{ij}(V_{ij})=\alpha_{ij}-\beta_{ij}V_{ij}$

Case 1 はネットワーク1において需要・供給関数より均衡解を求めたものであり，均衡交通量（V_{ij}^k）と式(1)からリンク交通量，式(2)から分布交通量が求められ，この時の分布交通量を分布1とする。Case 2 は同様にネットワーク2で均衡解を求めたものである。また，Case 3 はネットワーク2において分布交通量を固定し（分布1に収束させる），等時間配分を行なったものであり，リンクを増設した場合の従来の等時間配分と同等のネットワークになる。

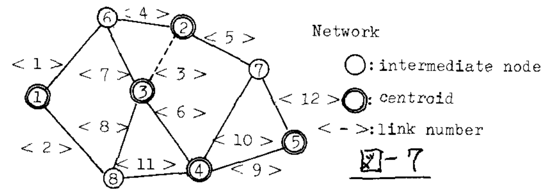


図-7

表-1 需要関数の係数(a)

ノード	1	2	3	4	5
1	0	47	55	70	29
2		0	40	60	34
3			0	53	50
4				0	48
5					0

表-2 供給関数の係数

リンク	β	α
1	0.03	4.1
2	0.06	29.0
3	0.03	6.6
4	0.02	3.4
5	0.02	4.0
6	0.06	17.8
7	0.08	17.0
8	0.05	7.5
9	0.03	5.3
10	0.08	22.0
11	0.04	5.8
12	0.03	1.0

a) 誘発交通量

従来の手法においては，街路を新設しても分布交通量とルート配分が変化するか，または，Case 3 のように，

表-3 Case1の分布交通量(分布1)

ノード	1	2	3	4	5	計
1	0	205	109	156	99	569
2		0	24	190	114	533
3			0	245	32	410
4				0	297	888
5					0	542

表-4 Case2の分布交通量

	1	2	3	4	5	計
1	0	209	124	158	83	574
2		0	234	181	94	718
3			0	253	88	699
4				0	307	899
5					0	572

図-8 Case 2のネットワーク

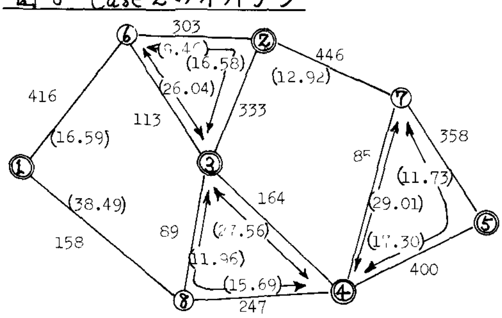


図-9 Case 3のネットワーク

数字；リンク交通量
(—)；リンク通行時間

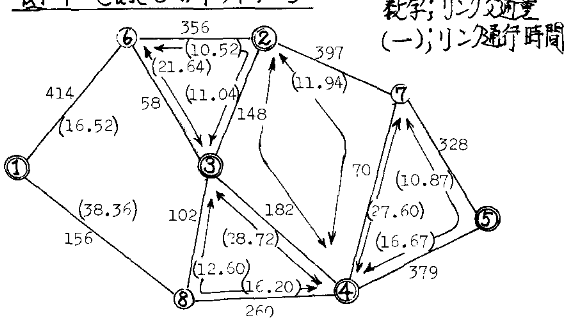
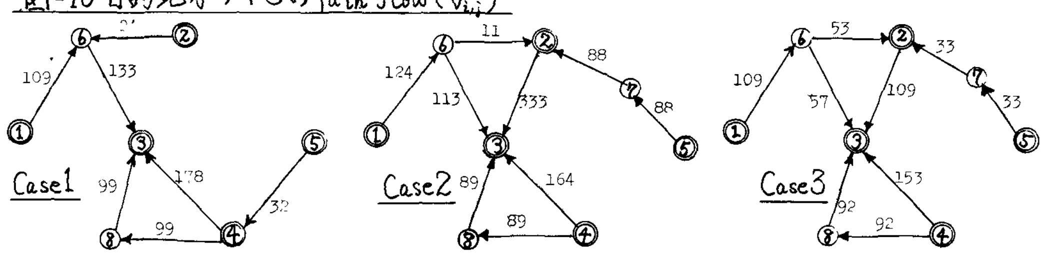


図-10 目的地がノード3のPath flow (V_{ij}^3)

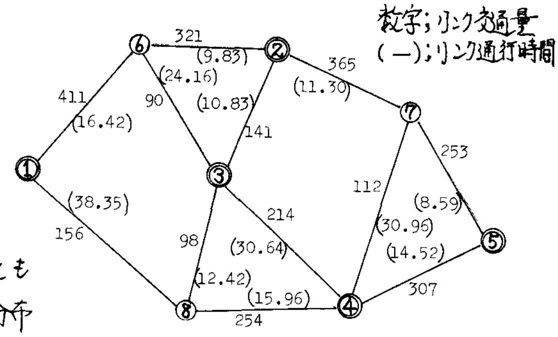


ルート配分が変化するのみであるが，この手法ではCase 2 のように総交通量が増加し，新設街路等による誘発交通量がでてくる。また，将来交通量に関しても，需要関数を上にシフトすることによって計算が可能である。

b) 総費用最小化問題

式(14)で分布交通量を固定した場合，従来と同等の費用最小化問題になる．従来，供給関数が定数の場合LP問題として，線型ならば2次計画法等で求めていたが，この手法においては関数が非線型であってもさほど計算は困難は生じない。このことは，式(8)の等時間配分型についてもいえる。図-11は，ネットワーク2について，分布交通量が分布1とした場合の費用最小化配分を，式(14)を用いて分布交通量固定の場合として計算したものである。

図-11 費用最小化配分のネットワーク



費用最小化 ⇒ $\sum h(V)\cdot V = 45636.5$

Case 3 ⟹ $\sum h(V)\cdot V = 46701.6$

C) 消費者余剰最大化問題

消費者余剰最大化は，費用最小化と同一の目的関数(式(14))を有するが，制約条件のない最大化問題として解かれる。いま，式(14)の傾き成分は次のようになる．

$$\frac{\partial H}{\partial V_{ij}^{P}} = G_i^{P}(V_i^{P}) - G_j^{A}(V_j^{A}) - h_{ij}(V_{ij}) - h'_{ij}(V_{ij})\cdot V_{ij} \qquad (15)$$

式(15)は交通に負荷量$\left(h'_{ij}(V_{ij})\cdot V_{ij}\right)$を加えた形となる。そして，消費者余剰最大化問題において自由な交通発生やルート選択をする交通流が対象の場合(自由度が大とは需要の弾力性が大きいということである)，負荷量による通行価格の上昇により交通をひかえようとする動きが生ずる。そのため，需要の弾力性が大きいほど，式(8)の等時間配分型と比較して，総交通量が減少する。表-5はネットワーク1において，式(14)より求めた消費者余剰最大化問題の分布交通量であり，表-5(分布1)と比べ，分布，総交通量ともに減少した値をなしている。

表-5 消費者余剰最大化の分布交通量

ノード	1	2	3	4	5	計
1	0	160	68	99	32	359
2		0	3	121	91	375
3			0	197	0	268
4				0	250	667
5					0	373

5. 考察

本研究は，需要・供給関数から均衡解を求めたが，需要関数そのものは分析，考察しなかった。また，目的関数最大化計算には勾配法を用いた。以下，この手法の特徴を掲げる．

1)従来の4段階推定法等においては，分布交通量計算段階における通行価格とルート配分後の通行価格が一致しない場合が生じる。しかし，本報告の手法では，そのような不合理が解消され，また，配分の通行価格が総交通量に影響している。

2)この手法では，径路に対する唯一の均衡解が求められ，最短径路計算を必要としない。

3)新設街路等による誘発交通量の計算が可能であり，Path flow (V_{ij}^{k}) の動きが明確にでてくる。

4)需要・供給関数が非線型であっても，線型の場合と比較して，さほど計算に困難が生じない。

5)分布交通量を固定した場合，従来の手法に変換することができる。

参考文献 "Studies in the Economic of Transportation" M. Beckmann, 他 (1956)，"計画者と技術者のための交通工学" M.ウォール, B.D.マーチン(訳 加藤, 山根)
"Precise determination of equilibrium in travel forecasting Problems using numerical optimization techniques" F. Wilkie, R.G Stefanko (HRB No.369)(1972)