非線形透水現象の解法

岐阜大学工学部　正会員　宇野尚雄

1. まえがき

不圧地下水など自由水面をもつ透水現象は水位変動により滞水層厚が変化するので，基礎微分方程式は非線形式となる．滞水層厚に較べて水位変動量が小さい通常の場合には，線形式でも十分な精度があるが，線形近似による誤差が懸念されてきた．そこで非線形のままで解く，非線形解法として Relaxation method を用いた一方法を提案し，計算例を併せ述べ，差分式解法の一資料とする．

2. 一次元の地下水位変動の基本式

不圧地下水の水位変動は図-1の記号を参照して，連続式(1)と運動式(2)により表わされる。

$$\beta\cdot\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q_x}{\partial x}=W \quad (1),\qquad q_x=-k_x(h-g)\cdot\frac{\partial h}{\partial x} \quad (2)$$

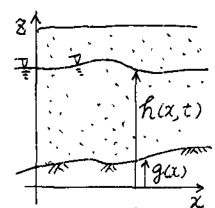

図-1 自由水面変動

ここに　β：貯留係数，W：補給源，q_x：x方向の流量，k_x：x方向透水係数

式(2)を式(1)に代入して q_x を消去すると，式(3a)または式(3b)がえられる。

$$\beta\cdot\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{k_x(h-g)\frac{\partial h}{\partial x}\right\}+W \quad (3a),\qquad \beta\cdot\frac{\partial h}{\partial t}=k_x(h-g)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_x\left\{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial h}{\partial x}\cdot\frac{dg}{dx}\right\}+(h-g)\frac{dk_x}{dx}\cdot\frac{\partial h}{\partial x}+W \quad (3b)$$

3. 基本式の差分式表示

筆者は式(3a)と式(3b)は同等ではないと考えているが，いま便宜的に式(3b)を基本式として，これを差分式表示してみよう。差分は $\frac{\partial h}{\partial t}=(h_i^{j+1}-h_i^j)/\Delta t$，$\frac{\partial h}{\partial x}=\{(h_{i+1}^j+h_{i+1}^{j+1})/2-(h_{i-1}^j+h_{i-1}^{j+1})/2\}/[2\Delta x]$，$\frac{\partial k_x}{\partial x}=(k_{x_{i+1}}-k_{x_{i-1}})/[2\Delta x]$，$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\{(h_{i-1}^j+h_{i-1}^{j+1})/2-2(h_i^j+h_i^{j+1})/2+(h_{i+1}^j+h_{i+1}^{j+1})/2\}/(\Delta x)^2$ などを用いることとし，$h_{i-1}^{j+1}, h_i^{j+1}, h_{i+1}^{j+1}$ に関する方程式として整理すると，

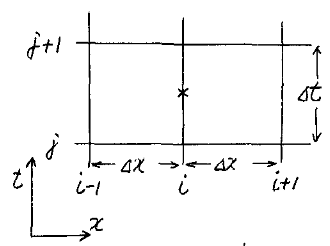

図-2 差分の格子

$$\begin{aligned}E_i\equiv{}&A_{i-1,i-1}(h_{i-1}^{j+1})^2+A_{i-1,i}\,h_{i-1}^{j+1}h_i^{j+1}+A_{i-1,i+1}h_{i-1}^{j+1}h_{i+1}^{j+1}\\&+A_{i,i}(h_i^{j+1})^2+A_{i,i+1}h_i^{j+1}h_{i+1}^{j+1}+A_{i+1,i+1}\cdot(h_{i+1}^{j+1})^2\\&+B_{i-1}h_{i-1}^{j+1}+B_i h_i^{j+1}+B_{i+1}h_{i+1}^{j+1}+C_i=0\end{aligned}\quad(4)$$

ここに

$$A_{i-1,i-1}=K_i/16,\quad A_{i-1,i}=K_i/4-(K_{i+1}-K_{i-1})/8,\quad A_{i-1,i+1}=-K_i/8$$

$$A_{i,i}=-K_i/2,\quad A_{i,i+1}=K_i/4+(K_{i+1}-K_{i-1})/8,\quad A_{i+1,i+1}=K_i/16$$

$$B_{i-1}=K_i[(h_i^j-2\cdot g_i)/4-(h_{i+1}^j-h_{i-1}^j)/8+(g_{i+1}-g_{i-1})/8]-(K_{i+1}-K_{i-1})(h_i^j-2g_i)/8$$

$$B_i=\beta_i+K_i[h_{i-1}^j-2h_i^j+h_{i+1}^j-2(h_i^j-2g_i)]/4+(h_{i+1}^j-h_{i-1}^j)(K_{i+1}-K_{i-1})/8$$

$$B_{i+1}=K_i[(h_i^j-2g_i)/4+(h_{i+1}^j-h_{i-1}^j)/8-(g_{i+1}-g_{i-1})/8]+(K_{i+1}-K_{i-1})(h_i^j-2g_i)/8$$

$$\begin{aligned}C_i={}&\beta_i h_i^j+K_i[(h_i^j-2g_i)(h_{i-1}^j-2h_i^j+h_{i+1}^j)/4+\{(h_{i+1}^j-h_{i-1}^j)^2-(h_{i+1}^j-h_{i-1}^j)\cdot 2(g_{i+1}-g_{i-1})\}/16]\\&+(h_i^j-2g_i)(h_{i+1}^j-h_{i-1}^j)(K_{i+1}-K_{i-1})/8+W_i\cdot\Delta t\end{aligned}$$

$$K_i=k_{xi}\,\Delta t/(\Delta x)^2$$

4. 多元2次方程式(4)の解法

多元2次方程式(4)の一般的解法はないので，Relaxation method により式(4)の $h_{i-1}^{j+1}, h_i^{j+1}, h_{i+1}^{j+1}$ の未知量を適当に決め，誤差 E_i を計算し，$E_i \to 0$ にすることを考える。$E_i = 0$ とすることは殆んど不可能に近いので，ある微小量 ε を考え，$|E_i| < \varepsilon$ となれば そのときの $h_{i-1}^{j+1}, h_i^{j+1}, h_{i+1}^{j+1}$ を解とする。

① いま h_i^{j+1} を適当に仮定する。たとえば $h_i^{j+1} = h_i^j + \delta$ （δ:適当な定数）

② E_i を計算し，E_i の絶対値の最大値 E とそのときの i を探す。

③ E が微小量 ε 以下ならば，そのときの h_i^{j+1} が解である。$E > \varepsilon$ ならば次の手順で修正する。

④ 最大値 E を得る i において，つぎの X，Y，Z および絶対値 $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ を計算する。

$$\left\{\begin{aligned} X &= \partial E_i/\partial h_{i-1}^{j+1} = 2A_{i-1,i-1}\, h_{i-1}^{j+1} + A_{i-1,i}\, h_i^{j+1} + A_{i-1,i+1}\, h_{i+1}^{j+1} + B_{i-1} \\ Y &= \partial E_i/\partial h_i^{j+1} = 2A_{i,i}\, h_i^{j+1} + A_{i-1,i}\, h_{i-1}^{j+1} + A_{i,i+1}\, h_{i+1}^{j+1} + B_i \\ Z &= \partial E_i/\partial h_{i+1}^{j+1} = 2A_{i+1,i+1}\, h_{i+1}^{j+1} + A_{i-1,i+1}\, h_{i-1}^{j+1} + A_{i,i+1}\, h_i^{j+1} + B_{i+1} \end{aligned}\right. \qquad (5)$$

⑤ $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ のうち最大値が $\overline{X}$ のとき式(6)，$\overline{Y}$ のとき式(7)，$\overline{Z}$ のとき式(8)の修正をして②に戻る。

$$h_{i-1}^{j+1} = h_{i-1}^{j+1} - E_i/X \quad (6), \quad h_i^{j+1} = h_i^{j+1} - E_i/Y \quad (7), \quad h_{i+1}^{j+1} = h_{i+1}^{j+1} - E_i/Z \qquad (8)$$

5. 計算例（線形解と非線形解の比較など）

図-3(a) に示すような $g(x)=0$，滞水層厚 10 m の一端を $h(0,t) = 11$ m に急上昇させたときの水位変化を表-1 に示す 6 ケースの条件下で計算したところ ⑥の $k_I/k_{II} = 5/20$ の場合以外はすべて発散した。④，⑤，⑥では $\delta = 0$，$\varepsilon = 10^{-4}$，の値を用いている。線形の①と非線形の④の各場合の解の相違を示したのが図-3(b) である。約 1 cm 程度の相違がみられるが，全体的には大差は認められない。

表-1 計算例

	①	②	③	④	⑤	⑥
k_I (m/day)	5	5	5	5	5	5
k_{II} (〃)	50	50	50	50	30	20
解法	線形	線形	線形(倍精度)	非線形	非線形	非線形
Δt (day)	2	0.5	2	2	2	2
Δx (m)	100	100	100	100	100	100
発散の始まる日数	138	152	78	172	250	764日計算するも発散せず

表-1 の⑥は発散こそしないが，式(3b) を基本として機械的に差分展開した式を用いた計算（A法，文献1) 参照）では物理的意味が不可解なものになっているため誤まりである。本文は非線形解法を用いても A法の問題点が消えないことを示しつつ，非線形解法の一方法を提案したものである。

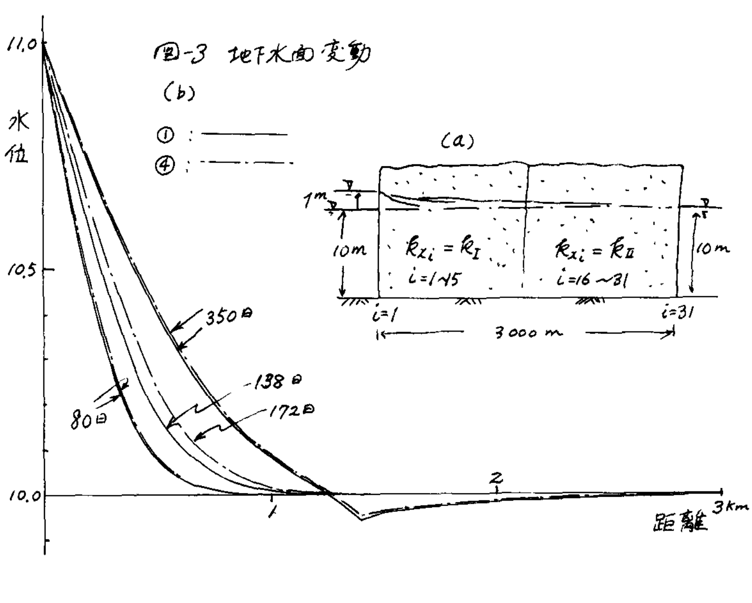

図-3 地下水面変動

1) 宇野尚雄：透水問題の差分式解法について，土木学会第30回年講，Ⅲ-233，pp 465〜466 (1975).