透水問題の差分式解法について（第二報）

岐阜大学工学部　正会員　宇野尚雄
岐阜大学工学部　○学生会員　新井　博

1．概説

地下水位の変動について考察する場合、降雨に関する情報，水理地質学的情報，地下水利用に関する情報，河川水位の情報，その他種々の情報を収集し，それらを条件としてとらえ，連続の式とダルシーの式よりなる基礎微分方程式を数値計算する方法が，1つとして考えられる。この数値計算をする際に、1つの解析方法として差分近似解法がある。そこで我々は単純な境界条件，初期条件を設定して準一次元流の数値計算を差分近似解法で行ったが，差分の取り方によって，物理的に不可解な計算結果が生ずることに気がついた[1]。そこで数学的に2つの差分近似解法の精度（accuracy）について検討したことと，その2つの差分法による計算結果について報告し、参考に供したい。

2．準一次元流の2つの差分近似解法

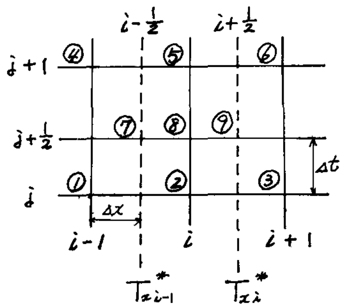
Dupuit−Forchheimer の仮定をみたす準一次元流では、連続の式，ダルシーの式は，次式のように与えられる。

$$\beta\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q_x}{\partial x}=W \qquad (1) \qquad\qquad q_x=-k_x\cdot H\frac{\partial h}{\partial x}=-T_x\frac{\partial h}{\partial x} \qquad (2)$$

ここで，β：貯留係数，　q_x：x成分の流量，　W；補給量，　k_x；x方向の透水係数
　　　H：帯水層厚，　T_x；x方向の透水量係数（$=k_x\cdot H$）

式(1)を式(2)へ代入して整理すると，次式のような基礎微分方程式が得られる。

$$\beta\frac{\partial h}{\partial t}=T_x\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial T_x}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+W \qquad (3)$$



図−1　差分の格子

式(3)を図−1のような差分のスキムニーを考えて，⑧の点で差分表示すると次式のような1つの差分近似式が得られる。以下これをA法とする。

$$\beta_i\frac{\textcircled{5}-\textcircled{2}}{\Delta t}=T_{x\,i}\frac{\textcircled{4}-2\cdot\textcircled{5}+\textcircled{6}+\textcircled{1}-2\,\textcircled{2}+\textcircled{3}}{2(\Delta x)^2}+\left(T_{x\,i+1}-T_{x\,i-1}\right)\frac{-\textcircled{4}+\textcircled{6}-\textcircled{1}+\textcircled{3}}{8(\Delta x)^2}+W_i \qquad (4)$$

ここで，　Δt：時間間隔，　Δx：x方向の距離間隔

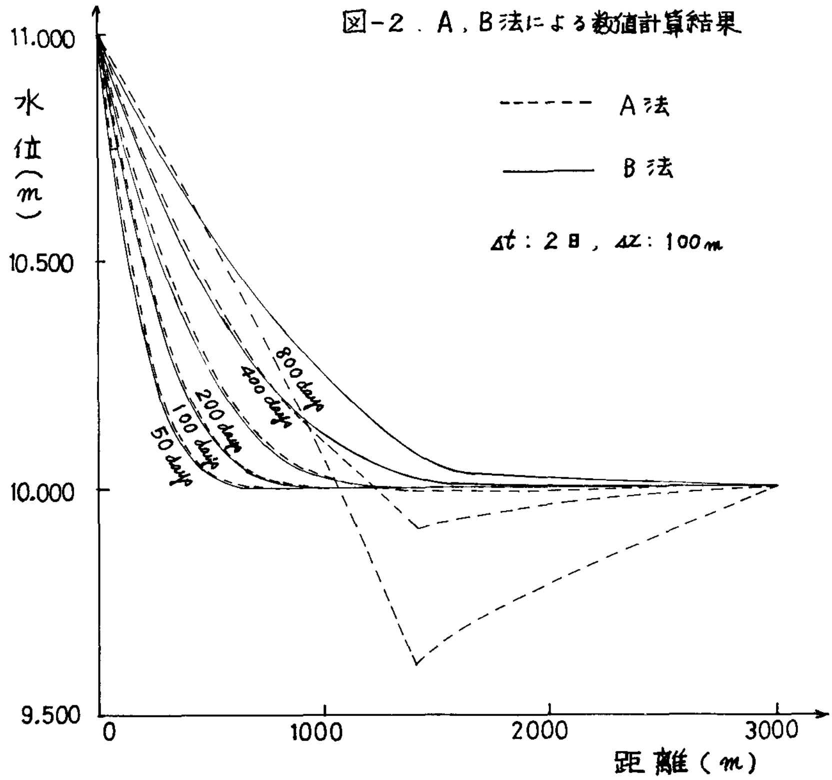
一方，式(1)，式(2)をそれぞれ差分表示し整理するとあらたな差分近似式が得られ，以下B法とする。

$$\beta_i\frac{\textcircled{5}-\textcircled{2}}{\Delta t}=T^*_{x\,i}\frac{\textcircled{6}+\textcircled{3}-\textcircled{5}-\textcircled{2}}{2(\Delta x)^2}-T^*_{x\,i-1}\frac{\textcircled{5}+\textcircled{2}-\textcircled{4}-\textcircled{1}}{2(\Delta x)^2}+W_i \qquad (5)$$

ここで，　T^*_x：図−1で示された位置における透水量係数

このA法，B法による数値計算の結果は，初期条件として水平水位10mを与え，上流側を1m水位上昇させた条件のものを，図2に示しておく。なお地盤条件としては，帯水層厚は一定であり，透水量係数Tは，距離1500mまでは50m²/dayで，1600m以降は500m²/dayと変化しているものを考え，貯留係数βとしては0.1を与えた。

図−2．A，B法による数値計算結果



3．Taylor展開によるA法，B法の精度

A法による差分近似式(4)をTaylor展開すると，式(4)では次の微小項以下が省略されている。

$$\beta_i\frac{(\Delta t)^2}{24}\frac{\partial^3 h}{\partial t^3}\bigg|_{⑤}-\frac{(\Delta x)^2}{12}T_{xi}\frac{\partial^4 h}{\partial x^4}\bigg|_{⑧}-\frac{\Delta x}{24}(⑥+③-④-①)\frac{\partial^3 T_{xi}}{\partial x^3}+\frac{(\Delta x)^4}{36}\frac{\partial^3 T_{xi}}{\partial x^3}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\bigg|_{②}+\frac{\Delta x}{12}(T_{xi+1}-T_{xi-1})\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\bigg|_{⑧} \quad (6)$$

一方，B法における差分近似式(5)も同様に，次の微小項以下が省略されている。

$$\beta_i\frac{(\Delta t)^2}{24}\frac{\partial^3 h}{\partial t^3}\bigg|_{①}-\frac{(\Delta x)^2}{24}T_{xi}\frac{\partial^4 h}{\partial x^4}\bigg|_{⑧}-\frac{\Delta x}{96}(⑥+③-④-①)\frac{\partial^3 T_{xi}}{\partial x^3}+\frac{(\Delta x)^4}{144}\frac{\partial^3 T_{xi}}{\partial x^3}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\bigg|_{⑧}+\frac{\Delta x}{24}\left[T^*_{xi}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\bigg|_{⑦}-T^*_{xi-1}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\bigg|_{②}\right]$$

$$-\frac{(\Delta x)^2}{8}\frac{\partial^2 T_{xi}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\bigg|_{⑧}-\frac{(\Delta x)^2}{8}\frac{\partial T_{xi}}{\partial x}\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\bigg|_{⑧} \quad (7)$$

ここで式(6)と式(7)の項の係数を比較すると，第4項の部分をのぞき，その他の項の係数はA法の方が大きくなっている。単純に項の係数を比較すると，B法のような差分のとり方は，A法のとり方よりも精度がよいように思われる。

4．結論

数学的にA法，B法の差分式をTaylor展開することによって，その差分式の精度を考えると，B法の方がやや精度がよいと思われる。図−2の計算結果において，A法による計算結果は透水量係数が急変する付近では発散を生じているが，B法では発散を生じていない。このことはB法は数学的に，精度がよいと思われる他に，透水量係数の変化をも考慮した差分近似解法と考えられるのではないだろうか。事実，B法を用いることによって発散が生じなくなった。

参考文献　1) 宇野尚雄：透水問題の差分式解法について，土木工学会第30回年講Ⅲ-233，PP465〜466.