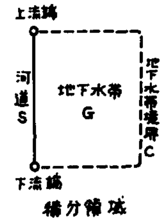
流域水の挙動に関する変分原理の実用化とその問題点

名古屋大学工学部 学生員　松 林 宇一郎

1．まえがき　流出現象 とくに低水は，河川水と地下水を一体として扱う必要がある。高木は このような，流域水全体としての挙動を変分形式に表現した。そして，応用例と物理的意義について発表している。この報告では その応用の1つとして 河道と地下水帯とから成る系の数値計算の方法を示し，基礎的問題について考察した。



2．基礎式および境界条件　高木によって提案された変分原理において，河道での運動の式に代るものとして，$Q=CH_s^2$ を用い，さらに境界条件を汎関数 υ の中に入れると，次のように書くことができる。q_s, q_c を境界での流量として，

$$\delta\upsilon=0 \quad \cdots(1) \qquad \upsilon=\int_G L_g\,dx\,dy+\int_S L_s\,dy+\int_C q_c(H_g+z)\,dc+\Big[q_s(H_s+z)\Big]_{\text{下流端}}^{\text{上流端}} \quad \cdots(2)$$

$$\left.\begin{aligned} L_g&=\gamma\frac{\partial H_g^*}{\partial t}(H_g+z)+\frac{1}{2}\left\{kH_g^*\left(\frac{\partial(H_g+z)}{\partial x}\right)^2+kH_g^*\left(\frac{\partial(H_g+z)}{\partial y}\right)^2\right\}-r(H_g+z)\\ L_s&=B\frac{\partial H_s^*}{\partial t}(H_s+z+\varepsilon)-CH_s^{*2}\frac{\partial(H_s+z+\varepsilon)}{\partial y}\end{aligned}\right\} \quad \cdots(3)$$

変分の後　$H_g=H_g^*$　$H_s=H_s^*$　$\cdots\cdots(4)$

H_s，河川水深　H_g；地下水帯水深　z；河床，地下水帯床の高さ
ε，高さで表わされた運動エネルギー（≒0 とした）　γ；間げき率
B；河巾　k；透水係数　r；地下水帯への水供給強度

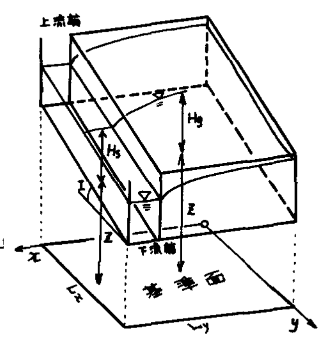


図-1 モデル

(4)式は「この変分原理は H_s，H_g が真の値 H_s^*，H_g^* と一致する時成立する」という条件のため，変分の後に満すべき補助条件式である。

$H_i=H_i+a\eta$　$i=s,g$　とおき a によって変分をとると，

$$\delta\upsilon=\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial a}\right|_{a=0}=\int_G\left[\gamma\frac{\partial H_g^*}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{-kH_g^*\frac{\partial(H_g+z)}{\partial x}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{-kH_g^*\frac{\partial(H_g+z)}{\partial y}\right\}-r\right]\eta\,dx\,dy-\int_C\left[-kH_g^*\frac{\partial(H_g+z)}{\partial x}\frac{dy}{dc}+kH_g^*\frac{\partial(H_g+z)}{\partial y}\frac{dx}{dc}-q_c\right]\eta\,dc$$

$$+\int_S B\left[\frac{\partial H_s^*}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}CH_s^{*2}-\left(-kH_g^*\frac{\partial(H_g+z)}{\partial x}\right)\right]\eta\,dy-\Big[(CH_s^{*2}-q_s)\eta\Big]_{\text{上流端}}^{\text{下流端}} \quad \cdots\cdots(5)$$

(4)式を用いた後 $\delta\upsilon=0$ とおくことは，η が任意の比較関数であるから，η のついた項が同時に零になる。すなわち 1．3 項より，地下水帯，河道での方程式が，2．4．項より 境界条件が満足されることと同値であることがわかる。実際の計算では $q_c=0$　q_s(下流端)$=CH_s^{*2}$ とおいた。

3．計算方法　試験関数　変分原理で記述される問題の解法としては，最近注目されている有限要素法があるが，今回は Ritz 法と同じく，定係数を持つ有限個の関数の一次結合である，試験関数による方法を用いた。すなわち，先に未知定係数を含んだ近似解の形を与え，変分原理(1)式によって未知定係数を決定する。試験関数は，未知定係数を，C_i　$i=1,N$，h_L(下流端水深) として(6)式で与えた。上流端水深 h_u は上流端での流入量から与えられる。

$$H_s = \frac{h_L - h_u}{L_y} y + h_u \qquad H_g = \frac{h_L - h_u}{L_y} y + h_u + \sum_{i=1}^{N} C_i \cos\frac{(2i-1)\pi}{2L_x} x \qquad \cdots\cdots(6)$$

非定常性　この問題は，時間微分項があり、非定常である。この取扱いとして，(1) 試験関数にtを入れる。(2) 時間に関しては差分をする。の2種があるが、ここでは(2)を用いた。差分は時間に対して2次の漸化形の $\dot{\phi} = (\phi - \hat{\phi})\frac{2}{\Delta T} - \hat{\dot{\phi}}$ を h_L, C_i に用いた。ここに・は時間による微分を，^は ΔT 前の値を表わす。したがって，h_L, C_i は各時間ステップで決定されるべき未知定係数である。

非線形性　実際の計算手順は i) (2) 式に (6) 式を代入し，領域内で積分し，汎関数 υ を求める。υ は $\hat{h}_L$, $\hat{h}_u$, $\hat{C}_i$, $\hat{\dot{h}}_L$, $\hat{\dot{h}}_u$, $\hat{\dot{C}}_i$, h_u を既知数として，h_L, C_i, h_L^*, C_i^* を未知数として含む関数である。ii) 汎関数の変分をとり零とおく。(1)式　この変分操作は，υ を h_L と C_i で偏微分しイコールゼロとすることによって行なう iii) (4)式を適用する。つまり $h_L = h_L^*$, $C_i = C_i^*$ とする。これによって，ii)で得られた $\partial\upsilon(h_L^*\,C_i^*)/\partial h_L = 0$, $\partial\upsilon(C_i^*, h_L^*)/\partial C_i = 0$ $i = 1, N$ は C_i^* h_L^* に関する非線形連立方程式となる。iv) iii)で得られた方程式を解く。これには Newton Raphson 法と類似のくり返し方を用いた。

4. 結果と検討　計算の妥当性の検討のため，特殊な条件での解を，他の計算法によるものと比較した。(1) 地下水帯のみの場合　水平な地下水帯の境界Sで水深が変化する1次元問題を考え，

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{kH_0}{\gamma}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

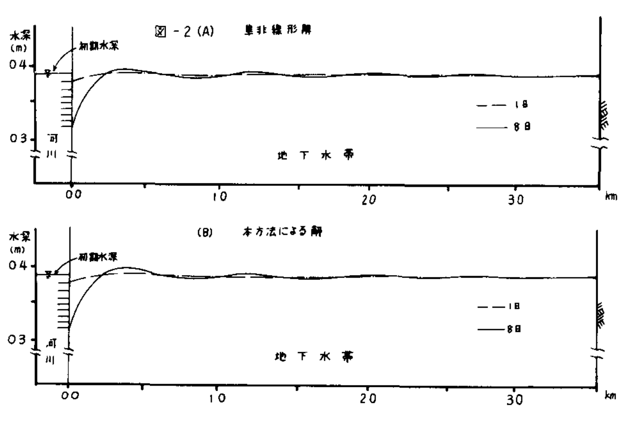
で表わされる線形微分方程式の解と比較した。H_0 として各ステップでの ΔT の平均水深を与え　非線形効果を出した。(図－2) これを見ると，共に境界での水位差が大きくなると振動するが，これは三角関数を用いたためと考えられる。とはいえ両者はほぼ一致している。(2) 河川のみの場合　上流水深(流量)を与え下流端を計算した。水深が減少するとき、河道貯留∇が ΔT 内に平均的に出るとして ∇/ΔT を計算し，$Q_L - Q_u$ と比較した。(表) これも，ほぼ一致している。以上のような特殊な場合には，この計算方法が，妥当な結果を与える事が示された。地下水帯と河道を結合した場合の計算結果は，当日発表の予定である。

表　計算結果（河川のみの場合）

日	上流端 Q_u m³/sec	下流端 Q_L m³/sec	$Q_L - Q_u$ m³/sec	∇/ΔT m³/sec
	6.000	6.000		
1	5.707	5 764	0 056	0 056
2	5.429	5 488	0.059	0 060
3	5.164	5.223	0 058	0 059
4	4 912	4.969	0 057	0 058
5	4 673	4 728	0 055	0 056
6	4.445	4.499	0 054	0 055
7	4.228	4.281	0 053	0.053
8	4.022	4 073	0 051	0 052

$$\nabla = B\,L_y(h_u - \hat{h}_u + h_L - \hat{h}_L)\frac{1}{2}$$

5　まとめ　計算が十分進んでいないため，また興味ある結果は得られていないが　境界条件の問題，非定常，非線形の問題等，数値計算するにあたっての基礎的な取扱いを定式化できたと考えている。



参考文献

1) Takagi. F. ' A Study on the Behavior of Basin Water by mean of the Variational Techniqu, Proc. JSCE, Vol 185, Jan., 1971. pp.71～81.