動荷重を受ける斜板の挙動について

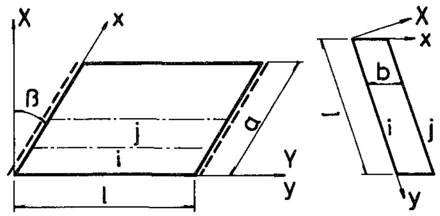
名古屋大学　学生員　○内藤　靜男
正　員　梶田　建夫

1 まえがき

本研究は，斜角の橋梁構造物に，車輌等の動荷重が作用する場合の動的特性を明らかにしようとするものである。ここでは，平行四辺形板の曲げ振動解析を有限帯板法（FSM）の手法を用いて行い，他の近似解法と比較検討した結果を報告する。平行四辺形板は，相対する二辺が単純支持されており，他の二辺は任意の境界条件をとりうるものとして解析する。

2 有限帯板法

Fig. 1 に示された斜交座標系$(\bar{x},\bar{y})$において，たわみwに対して，stripの両端の境界条件，および節線における変位の適合条件を満足する変位関数を，つぎのように定義する。



a) Plate　　b) Strip

Fig.-1 Skew plate and typical strip

$$(1)\quad w = \sum_{m=1}^{r} \phi_{(\bar{x})} \cdot \bar{Y}_{m}(\bar{y})$$

stripの両端が，単純支持されている場合には，基本級数関数$\bar{Y}_{m(\bar{y})}$は$\sin(m\pi\bar{y}/l)$となる。rは，必要とする級数の項数である。stripの節線パラメータとして$\{w_i,\theta_i,\gamma_i\}$を選び，$\phi_{(\bar{x})}$に5次の補間多項式を用いる。ただし，$\theta=-\partial w/\partial\bar{x}$，$\gamma=\partial^2 w/\partial\bar{x}^2$である。

$$(2)\quad w = \sum_{m=1}^{r} \mathbb{N}_m(\bar{x},\bar{y}) \cdot \delta_m^e$$

$$\mathbb{N}_m = \left[\left(1-\frac{10\bar{x}^3}{b^3}+\frac{15\bar{x}^4}{b^4}-\frac{6\bar{x}^5}{b^5}\right)\left(-\bar{x}+\frac{6\bar{x}^3}{b^2}-\frac{8\bar{x}^4}{b^3}+\frac{3\bar{x}^5}{b^4}\right)\left(\frac{\bar{x}^2}{2}-\frac{3\bar{x}^3}{2b}+\frac{3\bar{x}^4}{2b^2}-\frac{\bar{x}^5}{2b^3}\right)\left(\frac{10\bar{x}^3}{b^3}-\frac{15\bar{x}^4}{b^4}+\frac{6\bar{x}^5}{b^5}\right)\left(\frac{4\bar{x}^3}{b^2}-\frac{7\bar{x}^4}{b^3}+\frac{3\bar{x}^5}{b^4}\right)\left(\frac{\bar{x}^3}{2b}-\frac{\bar{x}^4}{b^2}+\frac{\bar{x}^5}{2b^3}\right)\right]\sin\frac{m\pi\bar{y}}{l}$$

$$\delta_m^e = \{w_i,\theta_i,\gamma_i,w_j,\theta_j,\gamma_j\}_m^t$$

直交座標系(X,Y)におけるひずみベクトル$\epsilon=\{-\partial^2 w/\partial X^2, -\partial^2 w/\partial Y^2, 2\partial^2 w/\partial X\partial Y\}^t$は，斜交座標のひずみベクトル$\bar{\epsilon}$と，変換行列$\mathbb{C}$によって次のように結びつけられる。

$$(3)\quad \epsilon = \mathbb{C}\,\bar{\epsilon} = \mathbb{C}_{(\beta)} \sum_{m=1}^{r} \mathbb{B}_m(\bar{x},\bar{y}) \cdot \delta_m^e$$

$$(4)\quad \sigma = \mathbb{D}\,\epsilon = \mathbb{D}\,\mathbb{C} \sum_{m=1}^{r} \mathbb{B}_{m(\bar{x},\bar{y})}\, \delta_m^e$$

ここに，$\mathbb{B}_m$行列は，式(2)における$\mathbb{N}_m$行列を$\bar{x}$，$\bar{y}$で微分することによって得られる。さらに，応力ベクトル$\sigma=\{M_X,M_Y,M_{XY}\}^t$は，弾性行列$\mathbb{D}$によって，式(4)のように表わされる。

剛性行列は，一般の有限要素法の手法によって得られるが，帯板法では，1stripに対する剛性行列はさらに$r\times r$の部分行列に分解でき（$\mathbb{K}=[\mathbb{K}_{mn}]$），つぎのように表わされる。

$$(5)\quad \mathbb{K}_{mn} = \int_0^l\int_0^b \mathbb{B}_m^t\,\mathbb{C}^t\,\mathbb{D}\,\mathbb{C}\,\mathbb{B}_n\, d\bar{x}\, d\bar{y} \cdot \cos\beta \qquad \begin{matrix} m=1,2,\cdots,r \\ n=1,2,\cdots,r \end{matrix}$$

部分行列の大きさは 6×6 である。同様に，質量行列も部分行列に分離できる。strip全体に，単位体積質量 ρ が分布しているとすると，このstripに対するコンシステント質量行列は，板厚を h とするとき，つぎのように表わされる。

$$(6)\quad \mathbb{M}_{mn}=\int_0^{\ell}\int_0^{b}\mathbb{N}_m^t\ \rho h\ \mathbb{N}_n\,d\bar{x}\,d\bar{y}\cdot\cos\beta \qquad \begin{array}{l} m=1,2,\cdots,r\\ n=1,2,\cdots,r\end{array}$$

単位面積あたりの質量 ρh が $\bar{y}$ 方向に変化していない場合には，基本級数関数の直交性により，$m\neq n$ のとき $\mathbb{M}_{mn}=\mathbb{0}$ となる。系全体の剛性および質量行列は，これらをstrip全体にわたって，級数の各項ごとに合成することによって得られる。

3 固有値解析

構造物の非減衰自由振動方程式は，上述した剛性行列と質量行列，および全変位ベクトル $\mathbb{S}$ によってつぎのように表わされる。

$$(7)\quad \mathbb{M}\ddot{\mathbb{S}}+\mathbb{K}\mathbb{S}=\mathbb{0}$$

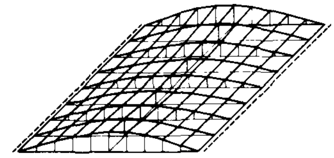
$$(8)\quad \mathbb{S}_{(t)}=\boldsymbol{\Phi}\,e^{ipt} \qquad i=\sqrt{-1}$$

自由振動は調和的であることから，変位 $\mathbb{S}(t)$ を式(8)のように表わすことにより，系の振動数方程式として，次式を得る。

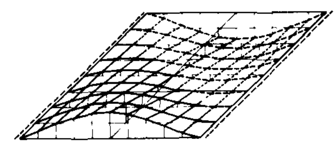
$$(9)\quad \left|\,\mathbb{K}-p^2\mathbb{M}\,\right|=0$$

この式の解として得られる固有振動数 p_j に対応して，第 j 番目の固有ベクトル $\boldsymbol{\Phi}_j$ が存在する。この固有ベクトルの有する直交性を利用して，応答解析を行うことができる。

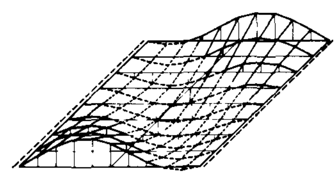
数値計算例として，周辺単純支持板，二辺自由板について固有値解析を行った。二辺自由板の固有値，固有モードをFig. 2 に示す。周辺単純支持ひし形板で，$\beta=45^\circ$ のとき Conway, Farnham[2] は $ka=5.65$ ($k^4a^4=p^2a^4\rho h/D$) を与えているが，本解析では，分割数8，$r=11$ として，ハウスホルダー - QR法により297元の固有値解析を行なった結果 6.086 を得た。



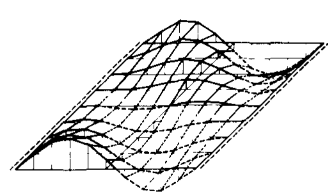
1-st mode p=16 60 rad/sec



2-nd mode p=21 55 rad/sec



3-rd mode p=40 95 rad/sec



4-th mode p=61 75 rad/sec

Fig.-2 Eigen value and mode shapes for first 4 modes of isotropic skew plate
a/l=1.0, β=45°, ν=0.3
8-strips 11-terms

4 あとがき

各種の斜板の振動性状，応答等の詳細は当日発表する。なお，本計算には名大FACOM 230-60，東大HITAC 8700/8800 を使用した。

参考文献

1) Brown.T.G, A.Ghali; "Semi-analytical solution of skew plates in bending." Proc. of Institution of Civil Engineers Part.2 Vol 57, 1974 pp 165-175

2) Conway.H.D, K.A.Farnham; "The Free Flexural vibrations of triangular, rhombic and Parallelogram plates and some analogies." Int. J. Mech. Sci. Vol 7, pp 811-816, 1965.