

点支持された矩形板の特異解法による解法

岐阜大学 工学部 正会員 中川 建治
 岐阜大学 大学院 学生会員 ○長瀬 裕信

1 まえがき 弾性平板に集中荷重を作用させると、載荷点近傍の断面力分布、あるいは着目点近傍の断面力影響面は、特異性を示し一般の級数解やF.E.M等によっては、その点近傍では精度のよい解が得られない。他方、Pucherは1938年に、このような特異点状の影響面の解析上の難点を微分方程式の特異解的扱ひによって克服する解法を発表した。本論文は、この特異解法を利用して点支持された矩形板の解析をおこなったものである。

2 特異解法による解法(等分布荷重) 集中荷重Pを受ける板のたわみwに関する微分方程式 $\nabla^2 \nabla^2 w = P/\delta$ の特殊解は

$$w = \frac{P}{8\pi^2 D} Y^2 \log Y/a \quad \dots (1)$$

という特異曲面であり、一般解は、これに同次解(重調和関数)を重ね合わせて境界条件を満足するようにしたものである。この特異解を支点反力に対する特異解という形で採用して、図-1に示すように左右3点ずつ点支持された矩形板が、等分布荷重を受ける場合のたわみ曲面を求めよう。等分布荷重による特殊解は、y軸対称であるから

$$w_0 = a_1 + a_2 x^2 + \frac{8}{4! D} x^4 \quad \dots (2)$$

としてよい。つぎに、式(1)の特異解を点支持された矩形板の支点到重ね合わせる。すなわち、x軸、y軸対称であるから、支点反力を支点1, 3, 4, 6では X_1 、支点2, 5では X_2 と考え、図-1で示された支点には、それぞれ特異解として

$$\frac{X_1}{8\pi^2 D} r_1^2 \log r_1, \frac{X_2}{8\pi^2 D} r_2^2 \log r_2, \frac{X_1}{8\pi^2 D} r_3^2 \log r_3, \frac{X_1}{8\pi^2 D} r_4^2 \log r_4, \frac{X_2}{8\pi^2 D} r_5^2 \log r_5, \frac{X_1}{8\pi^2 D} r_6^2 \log r_6 \quad \dots (3)$$

を重ね合わせる。

ここで、 $r_k = \sqrt{(x_k - x)^2 + (y_k - y)^2}$ ($k=1 \sim 6$) である。

式(2)、式(3)であらわされた特殊解、特異解とx、yの多項式を用いた重調和関数である同次解を重ね合わせて、選点法で、境界条件を満足するように、 X_1, X_2, a_1, a_2 、同次解の係数を決定する。ところで、たわみwはつぎのようにあらわされる。

$$w = w_0 + w_{00} + w_1$$

$$w_0 = a_1 + a_2 x^2 + \frac{8}{4! D} x^4$$

$$w_{00} = \frac{X_1}{8\pi^2 D} r_1^2 \log r_1 + \frac{X_2}{8\pi^2 D} r_2^2 \log r_2 + \frac{X_1}{8\pi^2 D} r_3^2 \log r_3 + \frac{X_1}{8\pi^2 D} r_4^2 \log r_4 + \frac{X_2}{8\pi^2 D} r_5^2 \log r_5 + \frac{X_1}{8\pi^2 D} r_6^2 \log r_6$$

$$w_1 = \sum_{i=1}^n C_i w_{1,i}$$

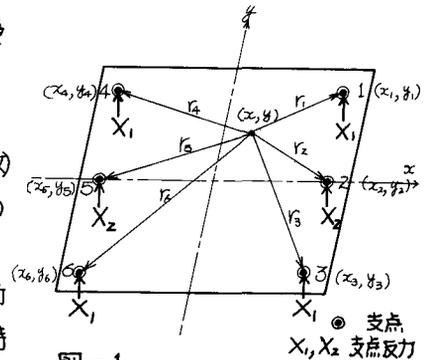


図-1

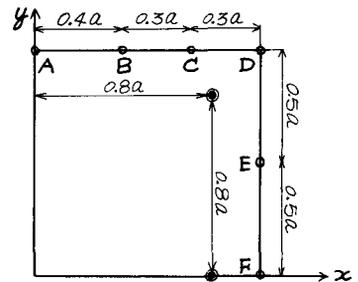


図-2

● 支点
○ 選点

さて、境界条件は、対称性を考慮して図-2のような平板の4分の1部分で考える。

(i) 各支点で $w = 0$ (4)

(ii) $x = a$ の点 D, E, F で $M_x = 0, \nabla_x = 0$ (5)

(iii) $y = a$ の点 A, B, C, D で $M_y = 0, \nabla_y = 0$ (6)

そして、支点反力と等分布荷重との鉛直方向の釣合い条件から

$$4X_1 + 2X_2 - (2a)^2 q = 0 \quad \dots \dots (7)$$

となる。等分布荷重による特殊解、支点到重ね合わせる特異解は、それぞれ式(2)、式(3)を用い、同次解は対称性よりつぎのような x, y の多項式を用いた。

$$\begin{aligned} w_{1,1} &= y^2 & w_{1,2} &= x^4 - 3x^2y^2 & w_{1,3} &= y^4 - 3x^2y^2 & w_{1,4} &= x^6 - 10x^4y^2 + 5x^2y^4 \\ w_{1,5} &= y^6 - 10y^4x^2 + 5y^2x^4 & w_{1,6} &= x^8 - 21x^6y^2 + 35x^4y^4 - 7x^2y^6 \\ w_{1,7} &= y^8 - 21y^6x^2 + 35y^4x^4 - 7y^2x^6 & w_{1,8} &= x^{10} - 36x^8y^2 + 126x^6y^4 - 84x^4y^6 + 9x^2y^8 \\ w_{1,9} &= y^{10} - 36y^8x^2 + 126y^6x^4 - 84y^4x^6 + 9y^2x^8 & w_{1,10} &= x^{12} - 55x^{10}y^2 + 330x^8y^4 - 462x^6y^6 + 165x^4y^8 - 11x^2y^{10} \\ w_{1,11} &= y^{12} - 55y^{10}x^2 + 330y^8x^4 - 462y^6x^6 + 165y^4x^8 - 11y^2x^{10} \\ w_{1,12} &= x^{14} - 78x^{12}y^2 + 715x^{10}y^4 - 1716x^8y^6 + 1287x^6y^8 - 286x^4y^{10} + 13x^2y^{12} \\ w_{1,13} &= y^{14} - 78y^{12}x^2 + 715y^{10}x^4 - 1716y^8x^6 + 1287y^6x^8 - 286y^4x^{10} + 13y^2x^{12} \end{aligned}$$

したがって、未知数は $X_1, X_2, a_1, a_2, C_1 \sim C_3$, 条件式は、(4), (5), (6), (7)であるから、結局17元の連立方程式となる。これを解いて未知数を決定し、平板内の任意点の各断面力を求めた。図-3, 図-4は、 x 軸方向($y=0$), y 軸方向($x=0$)のためみと曲げモーメントを示している。また、支点反力は、 $X_1 = 0.632q, X_2 = 0.736q$ となった。

る 考察 本計算のとじ合せ誤差(周辺)は、板中央の値と比較して M_x では15%, M_y では10%となった。さらに周辺の選点を増せば、さらに精度のよい解が得られるであろう。また支点反力については、 $q \times$ 板面積を1とすると $X_1 = 0.158, X_2 = 0.184$ となり、文献(2)の実験値 $X_1 = 0.160, X_2 = 0.180$ とよく一致している。線支持されている一般の板の解析は支点反力と外力との鉛直釣合式や回転釣合式を用いるが、本解法では両釣合式を採用していることが大きな特徴である。さらに、集中荷重による場合も同様に解析されることと、支点反力の影響面が精度よく得られることが注目されよう。

4 参考文献

1) A. Pucher ; Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten, Ingenieur archiv, Band XII, 1941.
 2) A. Mehmel u. H. Weise ; Modellstatische Untersuchung punktförmig gestützter schiefwinkliger Platten unter besonderer Berücksichtigung der elastischer Auflagermackgiebigkeit, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 161 (1964).

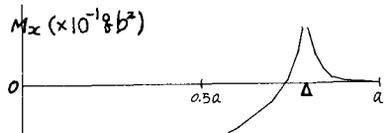
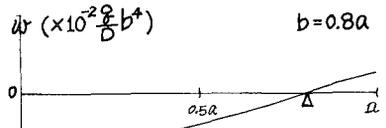


図-3

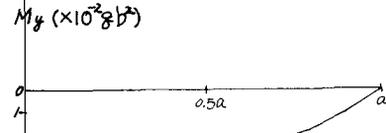
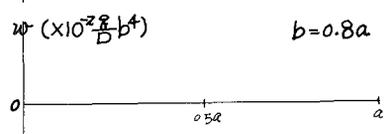


図-4