

ダイヤフラムの面内変形を考慮した箱型断面桁の解析

信州大学工学部 正 員 吉田俊弥

学生員 ○清水 茂

1. はじめに

最近の都市高速道路における曲線箱桁のような、箱型断面桁では、ダイヤフラムの解析が要求される場合が多い。この場合、ダイヤフラムは、その面内で完全に剛であるという仮定に基づいた解析が従来、多く用いられていた。ところで、箱桁などの析板構造に、大変有効な方法としては、Y. K. Cheung により提案された Finite Strip Method (F.S.M.)¹⁾があるが、これは、直接には、ダイヤフラムを導入しての計算はできないとされている。そして、この場合には、Strip とダイヤフラムの間の不静定余力を求めるという間接的な方法により解析²⁾されていた。

さて、F.S.M.では、集中荷重や橋軸と直角方向の線荷重は、バールス関数として橋軸方向の Fourier Series に展開している。そこで、我々は、ダイヤフラムの剛性も、同様に橋軸方向に Fourier Series に展開できれば、Strip とダイヤフラムを一体として解析できるのではないかと考えた。

よ、Strip の剛性マトリックス

Strip 中の点 (x, y) における変位を、次のように

展開する。

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{y}{b}\right) u_{im} + \frac{y}{b} u_{jm} \right\} \sin \frac{m\pi}{l} y \quad \dots (1, a)$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{y}{b}\right) v_{im} + \frac{y}{b} v_{jm} \right\} \cos \frac{m\pi}{l} y \quad \dots (1, b)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2xy^2}{b^3}\right) w_{im} + \left(x - \frac{2x^2}{b}\right) \theta_{im} + \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2xy^2}{b^3}\right) w_{jm} + \left(\frac{xy^2}{b^2} - \frac{x^2}{b}\right) \theta_{jm} \right\} \sin \frac{m\pi}{l} y \quad \dots (1, c)$$

$$\theta = \partial w / \partial x \quad \dots (1, d)$$

(u_{im}, u_{jm} etc. は、それぞれ、nodal line i, j における Fourier 係数、 τ は項数)

これらの変位関数と、応力-ひずみ関係式から、最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いて、剛性マトリックスを得る。この剛性マトリックスは、Fourier Series の、第 m 項に対する変位パラメータ $\{\delta_m\} = \{u_{im} \ v_{im} \ w_{im} \ \theta_{im} \ u_{2m} \ v_{2m} \ \dots\}^T$ 、荷重パラメータ $\{F_m\} = \{X_{im} \ Y_{im} \ Z_{im} \ M_{im} \ X_{2m} \ Y_{2m} \ \dots\}^T$ とすると、

$$\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \vdots \\ \{F_r\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] & \dots & [S_{1r}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] & \dots & [S_{2r}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [S_{r1}] & [S_{r2}] & \dots & [S_{rr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \vdots \\ \{\delta_r\} \end{Bmatrix} \quad \dots (2)$$

となる。しかし、 $[S_{mm}]$ は

その中に $\int_0^l \sin \frac{m\pi}{l} y \cdot \sin \frac{m\pi}{l} y \, dy$ 又は $\int_0^l \cos \frac{m\pi}{l} y \cdot \cos \frac{m\pi}{l} y \, dy$ なる係数を含んでおり、直交性から、 $m \neq n$ の時、 $[S_{mm}] = 0$ となる。従って、(2) は

$$\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \vdots \\ \{F_r\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [S_{11}'] & & & 0 \\ & [S_{22}'] & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [S_{rr}'] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \vdots \\ \{\delta_r\} \end{Bmatrix} \quad \dots (3)$$

これから、ダイヤフラムのない場合には、 $\{\delta_1\} \sim \{\delta_r\}$ を求めるためには、単に、 $\{F_m\} = [S'_{mm}]\{\delta_m\}$ を r 回計算すればよい。

3. ダイヤフラムの剛性マトリックス

まず、ダイヤフラムを三角形要素に分割する。各節点の変位を、パルス関数の Fourier 展開式で表すと、

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \\ u_k \\ w_k \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{im} \\ w_{im} \\ u_{jm} \\ w_{jm} \\ u_{km} \\ w_{km} \end{Bmatrix} \sin \frac{m\pi}{l} y = \sum_{m=1}^{\infty} \{\delta_m\} \sin \frac{m\pi}{l} y \quad \dots (4)$$

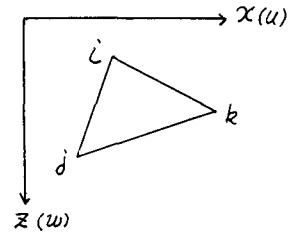


図-2

全ポテンシャルエネルギー ϕ は、

$$\phi = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV - \{\delta\}^T \{F\} \quad \dots (5)$$

($\{\epsilon\}$ はひずみベクトル、 $\{\sigma\}$ は応力ベクトル、 $\{F\}$ は外力ベクトル)

(4)、(5) を、通常の、平面応力状態における有限要素法の手法に準じて変形すると、

$$\phi = \sum_m \sum_n \left\{ \frac{1}{2} \{\delta_m\}^T \right\} \left\{ \int [B_m]^T [D] [B_m] dx dz \cdot \{\delta_n\} - \{\delta_m\}^T \sin \frac{m\pi}{l} l_f \sin \frac{n\pi}{l} l_f \{F_n\} \right\} \quad \dots (6)$$

$[D]$: 応力ひずみマトリックス, l_f : ダイヤフラムの位置, t : ダイヤフラムの板厚, $\{\epsilon\} = [B]\{\delta\} = \sum_m [B_m]\{\delta_m\}$, $[B_m] = [B] \sin \frac{m\pi}{l} y$ 。これから

$$\sum_m \sum_n \sin \frac{m\pi}{l} l_f \sin \frac{n\pi}{l} l_f \{[K]\{\delta_m\} - \{F_m\}\} = 0 \quad ([K] = \frac{1}{2} \int [B]^T [D] [B] dx dz) \quad \dots (7)$$

従って、(7) と同じ形の剛性マトリックス

$$\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \vdots \\ \{F_r\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [S'_{11}] & [S'_{12}] & \dots & [S'_{1r}] \\ [S'_{21}] & [S'_{22}] & \dots & [S'_{2r}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [S'_{r1}] & [S'_{r2}] & \dots & [S'_{rr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \vdots \\ \{\delta_r\} \end{Bmatrix} \quad \dots (8)$$

($[S'_{mm}] = [K] \cdot \sin \frac{m\pi}{l} l_f \cdot \sin \frac{m\pi}{l} l_f$) が得られる。しかし、ダイヤフラムの場合には、一般に $[S'_{mm}]$ は、消す事はできない。

3. 全体剛性マトリックス

(7)、(8) を組み合わせて、解くべき方程式は、

$$\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \vdots \\ \{F_r\} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \vdots \\ \{\delta_r\} \end{Bmatrix} ; [K] = \begin{bmatrix} [S'_{11}] & & & \\ & [S'_{22}] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [S'_{rr}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [S'_{11}] & [S'_{12}] & \dots & [S'_{1r}] \\ [S'_{21}] & [S'_{22}] & \dots & [S'_{2r}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [S'_{r1}] & [S'_{r2}] & \dots & [S'_{rr}] \end{bmatrix} \quad \dots (9)$$

なお、解析結果は当日発表する予定である。この計算にあたっては、信州大学データステーションを経由して、東京大学大型計算機センターを利用した。

4. 参考文献

① Y.K.Cheung, Folded Plate Structure by Finite Strip Method, ASCE ST12, 1969

② 吉村虎蔵他, ダイヤフラムを持つ曲線箱桁への F S M の応用, 土木学会講演概要集, 1975