

回転楕円体形シェル 海底石油タンクの設計計算について

清水建設株式会社 正員 蔵田忠廣
早稲田大学大学院 学生員 船山吉久
東海大学大学院 学生員 ○ 足立裕彦

A. 目的 本文は 内浦湾(駿河湾奥)内水深60m地点に設置することを目的とした 図-1のような長軸50m、短軸30mの回転楕円体形シェル石油タンクのシェル本体の設計計算について述べるものである。形体は不等況下を防ぐためタンクをトラス構造で支え、無筋コンクリート基礎で固定するようにした。設計計算に当って、外力として、静水圧・自重・浮力・流水圧・地震時動水圧・温度差・最大波によるシェルへの影響を考慮し、タンク自体の最も危険な状態である空屋時の場合を考えた。回転楕円体シェルの膜応力は荷重操作(次の節で述べる)を施した球殻の膜応力からアフ変換により求め、これを近似的に一般理論の特殊解とした。中央エッジリング付近には膜応力による変位を制限する曲げモーメントとエッジリングの半径方向推力が生じるためシェルとエッジリングとの間に一般理論に基づいた適合条件式をえて、この解を補解とした。そしてこの設計には、土木学会海洋鋼構造物設計指針(案)を適用した。

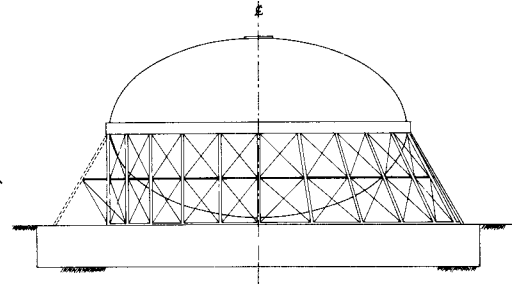


図-1 回転楕円体形シェルタンク概略図

B. 膜応力の算定 1) アフィン変換 図-2のアフィン変換(ζ方向のみn倍する変換)により球殻の膜応力から回転楕円体の膜応力を求める。この変換時の弧要素の変化は、

$$\left. \begin{aligned} \text{経線: } dS_\theta &= dS_\theta^* \\ \text{経線: } dS_\varphi &= \sqrt{d\xi^2 + n^2 d\zeta^2} = dS_\varphi^* \sqrt{\cos^2 \varphi^* + n^2 \sin^2 \varphi^*} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

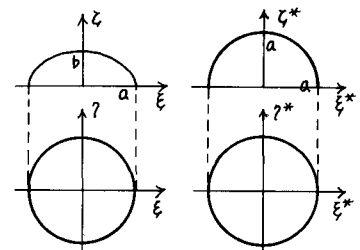
となるので両者の応力関係は、

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= N_\theta^* \frac{dS_\theta/dS_\varphi}{dS_\theta^*/dS_\varphi^*} = \frac{N_\theta^*}{\sqrt{\cos^2 \varphi^* + n^2 \sin^2 \varphi^*}} \\ N_\varphi &= N_\varphi^* \frac{dS_\varphi/dS_\theta}{dS_\varphi^*/dS_\theta^*} = N_\varphi^* \sqrt{\cos^2 \varphi^* + n^2 \sin^2 \varphi^*} \quad N_{\varphi\varphi} = N_{\varphi\varphi}^* \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

またこの時、球殻に作用する荷重成分、 P_θ^* , P_φ^* , P_ζ^* は変換後、

$$\left. \begin{aligned} P_\theta &= P_\theta^* / \sqrt{\cos^2 \varphi^* + n^2 \sin^2 \varphi^*} & P_\varphi &= P_\varphi^* / \sqrt{\cos^2 \varphi^* + n^2 \sin^2 \varphi^*} \\ P_\zeta &= n P_\zeta^* / \sqrt{\cos^2 \varphi^* + n^2 \sin^2 \varphi^*} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

となる。つまりζ方向のみがζ*成分のn倍された荷重が働くことになる。このような変換関係を留意すると、たとえば、球殻の法線方向に作用する荷重は変換後、やはり回転楕円体の法線方向を示さなくなる。従って



$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi^* & \eta &= \eta^* & \zeta &= n \zeta^* = \frac{b}{a} \zeta^* \\ \theta &= \theta^* & \tan \varphi &= n \tan \varphi^* \end{aligned} \right\}$$

図-2

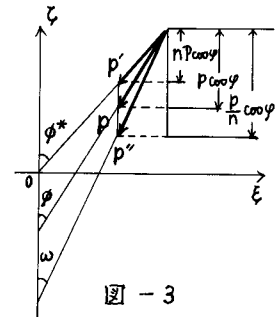


図-3

水圧のような荷重は 図-3 の荷重操作が必要となる。つまり、 P を回転楕円体の法線方向に実際に働く荷重とし、この成分を伝えた荷重を P' とすると、この P' を球殻に作用してやれば変換後 P' は P と一致し、実際の荷重状態となる。

この時、 P と P' 、 φ と φ^* 、 ω との関係を示すと、

$$P' = \frac{P}{n} \sqrt{\cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi} \quad \varphi^* = \sin^{-1} \left(\frac{n \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}} \right), \quad \omega = \sin^{-1} \left(\frac{n \sin \varphi^*}{\sqrt{\cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}} \right) \quad (1.4)$$

となり、球殻には次の荷重成分 $X \cdot Y \cdot Z$ を作用すればよい。

$$X = 0 \quad (1.5)$$

$$Y = P' \sin(\varphi^* - \omega) = \frac{P}{n} \sqrt{\cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi} \cdot \sin \left\{ \varphi^* - \sin^{-1} \left(\frac{n \sin \varphi^*}{\sqrt{\cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}} \right) \right\}$$

$$Z = P' \cos(\varphi^* - \omega) = \frac{P}{n} \sqrt{\cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi} \cdot \cos \left\{ \varphi^* - \sin^{-1} \left(\frac{n \sin \varphi^*}{\sqrt{\cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}} \right) \right\}$$

2) 軸対称荷重 膜応力状態の一般的な釣り合い式は図-4より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y_0 N_\varphi) + \frac{\partial N_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} Y_1 - N_\theta Y_1 \cos \varphi + Y Y_1 Y_0 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y_0 N_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} Y_1 + N_{\varphi\varphi} Y_1 \cos \varphi + X Y_1 Y_0 &= 0 \\ N_\varphi Y_0 + N_\theta Y_1 \sin \varphi + Z Y_1 Y_0 &= 0 \end{aligned} \right\} (1.6)$$

となり軸対称荷重の場合は (1.6) 式を $N_{\varphi\varphi} = N_{\varphi\varphi}$ 、 $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ 、 $X = 0$ 、及び $Y_1 = Y_2 = a$ 、 $Y_0 = a \sin \varphi$ (球殻) の条件下で N_φ^* 、 N_θ^* を求めればよい。静水圧を荷重として考える場合、図-5 のような荷重操作をする。

$$P = n P_1 = n \omega_0 \left\{ \frac{r}{n} + a(1 - \cos \varphi^*) \right\} \quad r: \text{水深} \quad \omega_0: \text{海水の密度} \quad (1.7)$$

つまり、(1.7) 式を (1.5) 式に代入しその荷重下で半径 a の球殻の膜応力を求め、(1.2) のアフ変換を施すと回転楕円体の膜応力 N_φ 、 N_θ が図-6 のように求まる。自重を荷重として考える場合は荷重操作は何もいらない。正に殻厚が変換後一定厚さのものから $\varphi = 90^\circ \rightarrow 0^\circ$ で n 倍の厚さに変化する。実際のタンクは殻厚一定なのだから図-7 の応力よりその増大を考慮に入れる必要は実はある。

3) 逆対称荷重 淡水圧時の応力は地震時水平動水圧の応力の 1% 程度なので地震時のみを述べる。地震時動水圧としてウェスターガードの式を用いその半分ずつを球殻に逆対称に作用させる。

$$R_k = K_h \cdot g \cdot m \quad m = \frac{7}{8} \cdot \omega_g \cdot \sqrt{H \cdot y} \quad (1.8)$$

K_h : 水平方向震度 (高さの割増率)

m : 水の付加質量 H : 水深 y : 作用点までの深さ

この場合も荷重操作を次のように施す。

$$P_1 = R_k/2 = n P = \frac{7}{16} K_h \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{H \cdot \left\{ \frac{r}{n} + a(1 - \cos \varphi^*) \right\}}$$

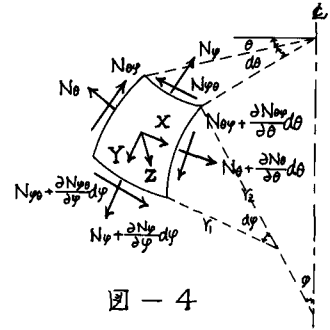


図-4

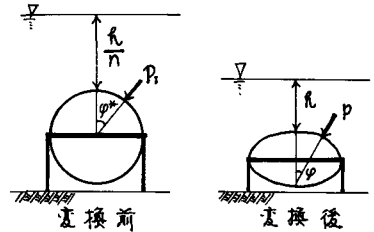


図-5

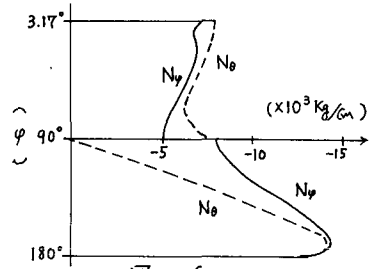


図-6

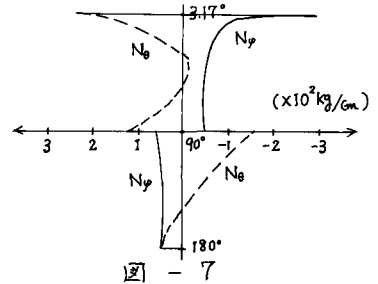


図-7

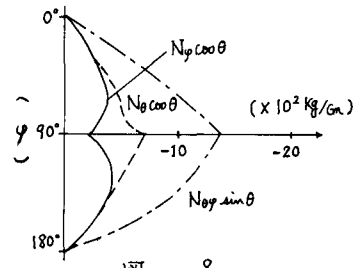


図-8

従って球殻に作用させる荷重は、

$$X = 0 \quad (1.9)$$

$$Y = P_2 \sin \varphi \cos \theta \sqrt{\cos^2 \varphi + \eta^2 \sin^2 \varphi} \cdot \sin \left\{ \varphi^* \sin^{-1} \left(\frac{\eta^2 \sin^2 \varphi^*}{\sqrt{\cos^2 \varphi^* + \eta^2 \sin^2 \varphi^*}} \right) \right\} \quad Z = P_2 \sin \varphi \cos \theta \sqrt{\cos^2 \varphi + \eta^2 \sin^2 \varphi} \cdot \cos \left\{ \varphi^* \sin^{-1} \left(\frac{\eta^2 \sin^2 \varphi^*}{\sqrt{\cos^2 \varphi^* + \eta^2 \sin^2 \varphi^*}} \right) \right\}$$

となり、これを(1.6)式に代入し膜応力を求め(1.2)のアフ変換を施すと図-8の応力状態が求まる。

C. 中央エッジリン・付近の端撓れ(軸対称荷重の場合) この場合の釣合方程式と弾性法則式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y_0 N_\varphi) - N_\theta Y_1 \cos \varphi - Q_\varphi Y_0 + Y_1 Y_0 &= 0 & N_\theta Y_0 + N_\theta Y_1 \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y_0 Q_\varphi) + Z Y_1 Y_0 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y_0 M_\varphi) - M_\theta Y_1 \cos \varphi - Q_\varphi Y_1 Y_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \frac{E R}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\theta) & N_\theta &= \frac{E R}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_\varphi) & M_\varphi &= \frac{-E R^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_\varphi + \nu \chi_\theta) & M_\theta &= \frac{-E R^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_\theta + \nu \chi_\varphi) \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{Y_1} \left(\frac{dV}{d\varphi} - \omega \right) & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{Y_2} (U \cot \varphi - \omega) & \chi_\varphi &= \frac{1}{Y_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{U}{Y_1} + \frac{dV}{Y_1 d\varphi} \right) & \chi_\theta &= \frac{1}{Y_1 Y_2} \left(U + \frac{d\omega}{d\varphi} \right) \cot \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

と変数 $V = \frac{1}{Y_1} (U + \frac{d\omega}{d\varphi})$, $U = Y_2 Q_\varphi$ を用い殻厚一定の場合(2.1)は又々のように書ける。

$$L(U) + \frac{V}{Y_1} U = E R V \quad L(V) - \frac{V}{Y_1} V = -\frac{U}{D} \quad (2.3)$$

$$\therefore D = \frac{E R^3}{12(1-\nu^2)} \quad L(\quad) = \frac{Y_2 d^2(\quad)}{Y_1^2 d\varphi^2} + \frac{1}{Y_1} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{Y_2}{Y_1} \right) + \frac{Y_2}{Y_1} \cot \varphi \right] \frac{d(\quad)}{d\varphi} - \frac{Y_1 \cot^2 \varphi}{Y_1 Y_2} (\quad)$$

が得られ、シェルの開角 α が除り小さくない場合、端撓れにより生ずる断面力の減衰は指数関数的であるので、ゲッゲラーの方法を考へる。そして我々の場合、天窓の影響は無視出来るので、

$$U = C e^{-\lambda \Psi} \cos(\lambda \Psi + \gamma), \quad V = C \frac{Y_2}{Y_1} \frac{2\lambda^2}{E R} e^{-\lambda \Psi} \sin(\lambda \Psi + \gamma) \quad \because \lambda^2 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2} \left(\frac{Y_2^2}{Y_1^2} \right) \quad \begin{aligned} \gamma &= \text{const} \\ \Psi &= \alpha - \varphi \end{aligned} \quad (2.4)$$

こゝより断面力と変位は次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} Q_\varphi &= \frac{C}{Y_2} e^{-\lambda \Psi} \cos(\lambda \Psi + \gamma), \quad N_\varphi = -C \cot(\alpha - \varphi) \frac{e^{-\lambda \Psi}}{Y_2} \cos(\lambda \Psi + \gamma), \quad N_\theta = -C \frac{\sqrt{2} \lambda}{Y_1} e^{-\lambda \Psi} \sin(\lambda \Psi + \gamma + \frac{\pi}{4}), \\ M_\varphi &= \frac{C}{\sqrt{2} \lambda} \frac{Y_1}{Y_2} e^{-\lambda \Psi} \cos(\lambda \Psi + \gamma + \frac{\pi}{4}), \quad M_\theta = \nu M_\varphi, \quad \delta = -C \frac{Y_2 \sin(\alpha - \varphi)}{Y_1 E R} \sqrt{2} \lambda e^{-\lambda \Psi} \sin(\lambda \Psi + \gamma + \frac{\pi}{4}) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

この時の積分定数 C を我々の計算に必要な次の2つの場合につき定める。

$\varphi = \alpha$ で M_α を考えると境界条件は



$(M_\alpha)_{\varphi=\alpha} = M_\alpha, \quad (N_\varphi)_{\varphi=\alpha} = 0$
 M_α となり $\Psi = 0, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}$ を持つので、
 $\therefore C = -2 \cdot \lambda_0 \cdot Y_{20} / Y_{10} \cdot M_\alpha \quad (2.6)$

$\varphi = \alpha$ で H_α を考えると境界条件は



$(M_\alpha)_{\varphi=\alpha} = 0, \quad (N_\varphi)_{\varphi=\alpha} = -H_\alpha \cos \alpha$
 となり、 $\Psi = 0, \quad \gamma = \frac{\pi}{4}$ を持つので
 $\therefore C = \sqrt{2} \cdot Y_{20} \cdot \sin \alpha \cdot H_\alpha \quad (2.8)$

こゝより水平変位 δ , 子午線接線の回転 V は、

$$(\delta)_{\varphi=\alpha} = \frac{2\lambda_0^2 \sin \alpha Y_{20}^2}{E R_0 Y_{10}} M_\alpha \quad (V)_{\varphi=\alpha} = -\frac{4\lambda_0^3 Y_{20}^2}{E R_0 Y_{10}^3} M_\alpha \quad (2.7)$$

こゝより水平変位 δ , 子午線接線の回転 V は、

$$(\delta)_{\varphi=\alpha} = -\frac{2\lambda_0 \sin \alpha Y_{20}}{E R_0 Y_{10}} H_\alpha \quad (V)_{\varphi=\alpha} = \frac{2\lambda_0^2 Y_{20}^2}{E R_0 Y_{10}^3} \sin \alpha H_\alpha \quad (2.9)$$

次に図-9のようにエッジリンとシェルとの連続状態を表わすと、次の4つの方程式に帰着する。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{01} + \delta_1 \pm \delta_t &= \delta_{01}^* + \delta_{02}^* + \delta_{01}^* + \delta_{02}^* + \delta_{01}^* + \delta_{02}^* + V_1^* \frac{d}{2} & \delta_{02} + \delta_2 \pm \delta_t &= \delta_{01}^* + \delta_{02}^* + \delta_{01}^* + \delta_{02}^* + \delta_{01}^* + \delta_{02}^* + V_2^* \frac{d}{2} \\ V_{01} + V_1 &= V_1^* & V_{02} + V_2 &= -V_1^* \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

ここで $\delta_{01}, \delta_{02}, V_{01}, V_{02}$: 膜力によるシェルの変位と回転 δ_t : 温度差によるシェルの変位

$\delta_1, \delta_2, V_1, V_2$: 不静定量によるリングの変位と回転

$\delta_{01}^*, \delta_{02}^*$: 膜力によるリングの変位

δ^* : 水圧によるリングの変位

V_r^* : 不静定量によるリングの回転

こゝより不静定量は決定出来、(2.5) 式より応力状態は図10~13となる。

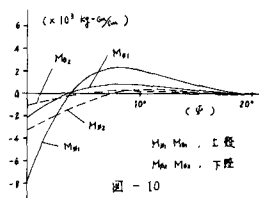


図 - 10

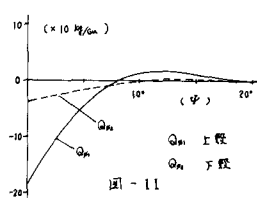


図 - 11

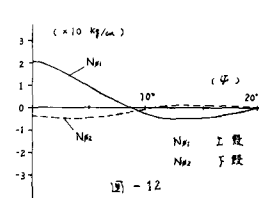


図 - 12

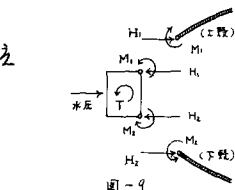


図 - 13

D. 天窓付近の端撓れ

天窓付近を図-14のような穴の開いた円板に内側と外側に純曲げが働いている平板と考える。そして $r=a$ を ∞ に長くしたものとして $M_1=0$ とみなす。この時せん断力 $Q=0$ だからこの平板の式は $\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \right] = 0$ となる。この時半径方向の曲げを $M_r = M_\theta$, それと直角方向の曲げを $M_t = M_\theta$ とすると、 $(M_\theta)_{r=b} = M_2$, $(M_\theta)_{r=a} = M_1$ となるので

$$M_\theta = \frac{b^2 M_2}{r^2} = \frac{b^2 M_2}{r_0^2 \sin^2 \varphi} = -M_\theta \quad (\because Y \geq b, M_1 = 0) \quad (3.1)$$

次に、天窓のリングとシェルとの連続状態を考えたと図-15より

$$V = -V^* \quad (3.2)$$

$$V = -\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{(r_0 + b) M_2}{D(1-\nu)} \quad V^* = \frac{2r}{d} |e| = \frac{2(r_0 + \frac{b}{2})}{E \cdot W \cdot d} (M_1^* - M_2)$$

$$D = \frac{E r^3}{12(1-\nu^2)} \quad d: \text{リッジの高さ} \quad b: \text{リッジの幅} \quad W: \text{リングの断面係数}$$

さらに M_1^* を図-16のような等分布荷重(水圧)を受ける埋め込み状態にある円板の解より決定する。

$$M_r = \frac{q}{16} [r_0^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)] \quad M_t = \frac{q}{16} [r_0^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)]$$

こゝより天窓円板のリングに受える偶力 M_1^* は

$$M_1^* = (M_r)_{r=r_0} + \frac{1}{r_0 + \frac{b}{2}} (M_t)_{r=r_0} \quad (3.3)$$

従って天窓付近に生ずる曲げは(3.1・2・3) 式より図-17のようになる。

なお、ここではリングとシェルとのせん断力は考慮に入らなかったが、その接点に水圧によるせん断力 $Q = \frac{p(r_0 + b)}{2}$ を等分布させ、この応力にシェルが耐えうることを確認した。

E. 結論. 以上のような応力計算と座屈(一樣外圧下の球殻の座屈式をこの場合の座屈に代用した)を考慮すると、使用鋼材HT 60とし、シェル上殻の厚さ4mm、下殻の厚さ6mmとなり、上殻エッジリング付近は増強として $\varphi=15^\circ$ 前後まで6mmの厚さとするればその安全は十分保たれる。よって、現在の工学の水準及び鋼材の質量を考えて直ちにも、このタンクを作りうる可能性は十分あると思う。

最後に、本論文作成に当り終始懇篤な御指導ならびに御助言を承えて下さった荒井利一郎先生・斎藤明先生・奥本克利先生に對して、ここに謹んで感謝の意を表します。

参考文献：荒井利一郎“応用力学” Timoshenko “Plates and Shells” Flugge “薄板力学” “Stresses in Shells” etc.