過飽和交差点における信号周期とスプリットの決定法

信州大学工学部　正員　奥谷　巌

1．まえがき　単独交差点を対象とした周期・スプリットの決定については，アダムスの式をはじめとする理論がすでにあるが，それらはいずれも飽和状態以前の交差点を前提にしており，現実によくみられる過飽和状態の交差点に対しては，周期・スプリットの決定理論はみあたらない。したがって，本稿においては，過飽和状態に対しても適用可能な単独交差点の周期・スプリットの決定方法に関し，数理計画法を導入した新しい方法について考察してみた。

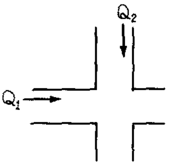

図-1 対象交差点

2．周期・スプリットの最適化問題の定式化　図-1のような交差点において，水平方向の2つの流入部のうち，より混雑度（交通需要量と交通容量の比）の大きい流入部に対する交通需要量，単位青信号時間あたりの交通容量，青信号時間をそれぞれQ_1，C_1，G_1とし，垂直方向に対するそれらをQ_2，C_2，G_2とすると，まずむだな青信号時間を出さないという観点から，G_1およびG_2は最大限交通需要を捌き切る大きさであれば十分であり，　$C_1 \cdot G_1 \leqq Q_1 \cdot T$　(1)　$C_2 \cdot G_2 \leqq Q_2 \cdot T$　(2)　なる不等式条件を導くことができる。ここに，Tは周期を表わすものとする。また，1周期あたりのロス時間をLとすると，当然のことながら　$T \geqq G_1 + G_2 + L$　(3)　なる関係が成立しなければならない。一方，周期・スプリットの機能はできるだけ多くの交通量を捌くことであると考えることができるとすれば，目的関数Fを　$F = (C_1 \cdot G_1 + C_2 \cdot G_2)/T$　(4)　のように与え，これを式(1)～式(3)の制約条件のもとで最大にするT，G_1，G_2を求めればよいことになる。このようにして，単独交差点の周期・スプリット決定の問題が1つの数理計画の最適化問題として定式化できることがわかった。

3．最適化の方法　上に示された最適化問題は，制約条件は線形であるが目的関数が非線形であるため，いわゆる非線形最適化問題に属する。したがって目的関数の性質について調べておく必要があるわけであるが，幸い制約条件がすべて線形で実行可能領域が凸集合であり，かつ目的関数が線形分数関数となっていることから，Fは擬似凸かつ擬似凹関数（2次元の場合の右上がりの曲線に対応）としての性質をもっていることがわかる。さて，式(1)および式(2)の両辺をTでわり辺々加え合わせると次式が得られる。　$(C_1 \cdot G_1 + C_2 \cdot G_2)/T \leqq Q_1 + Q_2$　(5)　式(5)の左辺は明らかに目的関数に等しく，したがってこの式はFが上に有界であることを示している。もし，式(1)および式(2)が同時に等号で成立するならば，そのときに限って式(5)の左辺のFは最大値(Q_1+Q_2)をとることになる。このとき，　$G_1 = (Q_1/C_1) \cdot T$　(6)　$G_2 = (Q_2/C_2) \cdot T$　(7)　となるから，式(6)および式(7)を式(3)に代入すると　$T \geqq (Q_1/C_1) \cdot T + (Q_2/C_2) \cdot T + L$　(8)　なる関係式が導かれ，少なくとも　$\{(Q_1/C_1) + (Q_2/C_2)\} < 1$　(9)　でなければならないことがわかる。式(9)が成立するならば，式(8)より　$T \geqq L/[1-\{(Q_1/C_1)+(Q_2/C_2)\}]$　(10)　となる。すなわち，式(10)の範囲にある周期Tについては，式(6)および式(7)のように青信号時間を与えることによって，目的関数Fをその最大値(Q_1+Q_2)とできるということである。以上のこととFが擬似凸かつ擬似凹関数であることから，式(9)が成立する場合におけるTの1つの値に対するFの最大値（これを$F(T)$と表わ

す）をグラフに書いてみると図-2のようになることがわかる。ただし，図-2中の T_0 は式(10)の右辺の値を表わしているものとする。この図からもわかるように F を最大にするということであれば，T_0 以上のいかなる T を周期としてもよいことになるが，一般に周期が大きくなると待ち時間等の交通損失は増加するという性質がある。このことを考慮すると，同じ F の最大値 (Q_1+Q_2) を与えるならば周期は小さい方が望ましく，したがって最適周期は T_0 となるのである。これは従来から用いられてきているアダムの式に一致する。

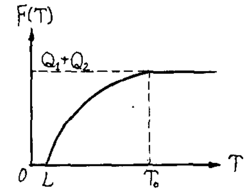

図-2 飽和以前のF(T)

式(9)が成立しない場合（これは交差点が過飽和状態にあることを示す），すなわち $\{(Q_1/C_1)+(Q_2/C_2)\} \geqq 1$ (11) の場合については，最適化はどのようにしてなされるであろうか。まず，一般性を失なうことなく， $(Q_1/C_1) \geqq (Q_2/C_2)$ (12) と仮定することができる。また，極端な場合を割愛することにして， $(Q_1/C_1)<1$ (13) $(Q_2/C_2)<1$ (14) とする。そうすると線形計画法の考え方を適用することにより，次のような3つのTの範囲に分かれて，F(T) とそれを与える G_1，G_2 が求められる。 a) $T<L/\{1-(Q_2/C_2)\}$ の場合 ① $C_2<C_1$ ならば， $G_1=T-L$ (15)， $G_2=0$ (16) $F(T)=C_1-(L\cdot C_1/T)$ (17) ② $C_2 \geqq C_1$ ならば， $G_1=0$ (18)， $G_2=T-L$ (19) $F(T)=C_2-(L\cdot C_2/T)$ (20) b) $L/\{1-(Q_2/C_2)\} \leqq T < L/\{1-(Q_1/C_1)\}$ の場合 ① $C_2<C_1$ ならば， $G_1=T-L$ (21)， $G_2=0$ (22) $F(T)=C_1-(L\cdot C_1/T)$ (23) ② $C_2 \geqq C_1$ ならば， $G_1=\{1-(Q_2/C_2)\}\cdot T-L$ (24)， $G_2=(Q_2/C_2)\cdot T$ (25) $F(T)=C_1+Q_2\cdot\{1-(C_1/C_2)\}-(L\cdot C_1/T)$ (26) c) $T \geqq L/\{1-(Q_1/C_1)\}$ の場合 ① $C_2<C_1$ ならば， $G_1=(Q_1/C_1)\cdot T$ (27)， $G_2=\{1-(Q_1/C_1)\}\cdot T-L$ (28) $F(T)=C_2+Q_1\{1-(C_2/C_1)\}-(L\cdot C_2/T)$ (29) ② $C_2 \geqq C_1$ ならば， $G_1=\{1-(Q_2/C_2)\}\cdot T-L$ (30)， $G_2=(Q_2/C_2)\cdot T$ (31) $F(T)=C_1+Q_2\cdot\{1-(C_1/C_2)\}-(C_1\cdot L/T)$ (32)

以上より，図-2に対応させてF(T)のグラフを書くと図-3のようになる。すなわち，F(T)はTの増加とともに大きくなり，Tが無限大になったときに目的関数は最大値をとる。したがって，Fを最大にするという規準のもとにおける最適周期および青信号時間はいずれも理論的には無限大になる。

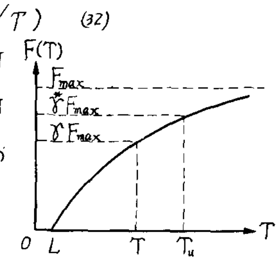

図-3 過飽和状態のF(T)

4．過飽和交差点の最適周期の与え方

理論的最適解とは別に，実際的でかつより望ましいという意味における最適周期の与え方について次のような方法を提案する。いま，経験的にわかっている周期の上限値を T_u とし，F の最大値を F_{max} としたとき，一般的に $F(T_u)=\overset{*}{\gamma}\cdot F_{max}$ $(0<\overset{*}{\gamma}<1)$ (33) と書けるし，また T_u より小さい T に対しても $F(T)=\gamma\cdot F_{max}$ $(0<\gamma<\overset{*}{\gamma})$ (34) と書かれるであろう。このとき (i) $\overset{*}{\gamma}$ がある値 α（たとえば0.95）より小ならば最適周期を T_u とし，式(27)，(28)または式(30)，(31)を利用して対応する青信号時間を求め，それを最適青信号時間とする。 (ii) $\overset{*}{\gamma}>\alpha$ の場合，いま $\gamma=\overset{*}{\gamma}-\beta$ （$0<\beta<\overset{*}{\gamma}$，たとえば $\beta=0.01$）としたとき，T_u と $F(T)=\gamma\cdot F_{max}$ を満たす T との差が定められた値 τ（たとえば50秒）より小さいならば，最適周期を T_u とし対応する青信号時間を最適な青信号時間とする。逆に τ より大ならば最適周期を T，対応する青信号時間を最適な青信号時間とする。

5．むすび　比較的独立した交差点で，交通需要が極めて多い場合に本方法は有用となろう。