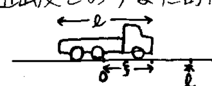
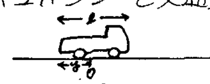
交通量，交通密度とオキュパンシーの分布の相互関係について

信州大学工学部　正員　奥谷 巌
〃　○ 佐藤武久

1．まえがき　交通情報としては交通量，交通密度また車頭時間間隔の確率など種々のものがあるが，その中で時間オキュパンシーや空間オキュパンシーについてはあまり研究されていない．また時間および空間オキュパンシーと交通量および交通密度との相互関係についても同様である。本稿ではこのような事情をふまえ空間オキュパンシーと交通密度との，また時間オキュパンシーと交通量との相互関係について基礎的立場から考察を行なう。


図−1

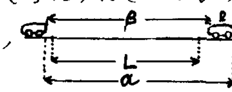

図−2

2．空間オキュパンシーと交通密度との関係

(1) 交通密度と車長分布による空間オキュパンシーの分布の表現　いま1車線道路上の区間L内に$P_n(L)$の確率をもってn台の車が分布し，そのときの空間オキュパンシーXの確率密度を$f(X)$とする。さらに1台の車によって空間オキュパンシーZ_iがひきおこされる確率密度を$f(z_i)$とすればn台の車によってXの空間オキュパンシーをとる確率密度は各々の確率の分布のたたみこみによって$f^{n*}(X)$ ----(1) としてあらわされる．ここで区間の端の地点に1台の車が図−1のようにまたがっているときのことを考えてみる。車長ℓの確率密度を$h(\ell)$，車がある地点に存在する確率密度はどこでも一様であるのでこれを$\bar{\tau}$とおけばこのようなことのおこる確率は$\mu=\int_0^{\ell^*}\left[\int_{\xi}^{\ell^*}h(\ell)d\ell\right]\bar{\tau}d\xi$ ----(2) としてあらわされる。なおℓ^*はℓの最大値である。次に図−2のように計測区間の端点に車がまたがり，かつ端点と車尾との距離がyとなる確率密度$\eta(y)$を求めてみよう。まず車長ℓを固定して考えると$Prob\{y,\ell\}=Prob\{y|\ell\}\cdot Prob\{\ell\}=\frac{dy}{\ell}h(\ell)d\ell$なので$\eta(y)dy=Prob\{y\}=\int Prob\{y,\ell\}=\int_y^{\ell^*}\frac{h(\ell)}{\ell}d\ell\,dy$　ゆえに$\eta(y)=\int_y^{\ell^*}\frac{h(\ell)}{\ell}d\ell$ ----(3) なお$\int_0^{\ell^*}\eta(y)dy=1$が問題となるが$\int_0^{\ell^*}\left[\int_y^{\ell^*}\frac{h(\ell)}{\ell}d\ell\right]dy=\int_0^{\ell^*}\left[\int_0^{\ell}\frac{h(\ell)}{\ell}dy\right]d\ell=\int_0^{\ell^*}h(\ell)d\ell=1$となる。さてこの$y$によっておこされるオキュパンシーの増減を$Y$とすると$Y=y/L$ ----(4)　またYをとる確率について，$H(Y)dY=h(y)dy$が成立する。したがって$H(Y)=L\int_{LY}^{\ell^*}\frac{h(\ell)}{\ell}d\ell$ ----(5)　以上の考察を基礎として空間オキュパンシーがZとなる確率密度を求めてみよう。これには次の6つの場合が考えられる。　i) 区間内にn台の車が存在し($n\geqq1$)，両端とも車がかからない．このとき$f(Z)=(1-\mu)^2\sum_{n=1}^{\infty}P_n(L)\bar{f}^{n*}(Z)$ -----(6) ただし$\bar{f}^{n*}(Z)=f^{n*}(Z)/\int_0^1 f^{n*}(Z)dZ$ ----(7)　ii) i)と同様n台の車があるがそれと別に1台の車尾が区間内に残っておりそれによって増える空間オキュパンシーをY_1とする。$Z=X+Y_1$　このとき$f(Z)=\mu(1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}P_n(L)\bar{a}(Z)$ ----(8)　ここで$a(Z)=\int_0^Z f^{n*}(X)H(Z-X)dX$ ----(9)　iii) n台の車があるがそのうち最後の1台の車尾が区間外に出ている場合である。それによって減る空間オキュパンシーをY_2とする．$Z=X-Y_2$　このとき$f(Z)=\mu(1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}P_n(L)\bar{b}(Z)$ ---(10)　$b(Z)=\int_Z^1 f^{n*}(X)H(X-Z)dX$ ----(11)　iv) n台の車があるがそのうち1台は車尾が区間外に出ていてそれによって減る空間オキュパンシーをY_2，またn台とは別に1台車尾が区間内に残っていてそれによって増える分をY_1とする。$Z=X+Y_1-Y_2$　このとき$f(Z)=\mu^2\sum_{n=1}^{\infty}P_n(L)\bar{C}(Z)$ ----(12)　$C(Z)=\int_0^Z\left[\int_{Z-Y_1}^{Z+\frac{\ell^*}{L}}f^{n*}(X)\cdot H(Y_1)H(X+Y_1-Z)dX\right]dY_1$ ----(13)　v) 区間内に1台だけ車尾が残っている場合。このときは0台とカウントされ$f(Z)=\mu P_0(L)H(Z)$ ----(14)　vi) 区間内に車の一部分も存在しないとき。$f(Z)=(1-\mu)P_0(L)\delta(Z)$ ----(15)　ただし$\delta(Z)$はデルタ関数である。

以上 i) から vi) の場合すべてを加えあわせて $f(z)=(1-\mu)P_0(L)\delta(z)+\mu P_0(L)H(z)+(1-\mu)^2\sum_{n=1}^{\infty}P_n(L)\overline{f^{n*}}(z)+\mu(1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}P_n(L)\left(\overline{a}(z)+\overline{b}(z)\right)+\mu^2\sum_{n=1}^{\infty}P_n(L)\overline{c}(z)$ ---(16) なお $\int_0^1 f(z)dz=(1-\mu)P_0(L)+\mu P_0(L)+(1-\mu)^2\sum_{n=1}^{\infty}P_n(L)+2\mu(1-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}P_n(L)+\mu^2\sum_{n=1}^{\infty}P_n(L)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(L)=1$ となって $f(z)$ は確率密度関数だといえる。

(2) 空間オキュパンシーと車長分布による交通密度の表現　(16)式において $f(0)dz=(1-\mu)P_0(L)=A$ ----(17) として，また $\overline{a}(z)$，$\overline{b}(z)$，$\overline{c}(z)$ も車長と空間オキュパンシーの分布によって与えられているものとする。ここで vi) がおこる場合を考えてみよう。図－3において車頭間隔を α，車長を l，車間距離を β としそれぞれの確率密度を $\psi(\alpha)$，$h(l)$，$\phi(\beta)$ とすると $\beta+l=\alpha$，$\beta\geqq L$ より $A=\int_L^{\infty}\phi(\beta)d\beta$ ----(18) これを L で微分して $\phi(L)=-\frac{dA}{dL}$ ----(19)



図－3

これより $\psi(\alpha)=\int_0^{\alpha}\phi(\beta)h(\alpha-\beta)d\beta$ ----(20) として $\psi(\alpha)$ が求まる。したがって一般化されたポアソン分布を導く方法と同様にして交通密度は $P_n(L)=\int_L^{\infty}\psi^{(n+1)*}(\alpha)d\alpha-\int_L^{\infty}\psi^{n*}(\alpha)d\alpha$ ----(21) としてあらわされる。

3．時間オキュパンシーと交通密度との関係　これらの関係を論じるにあたってまず言えることは時間の長さを線分の長さで考えることにすれば，2で論じたと同様にして交通情報の相互関係を考察することができるということである。

(1) 交通量と車長速度比の分布による時間オキュパンシーの分布の表現

2で扱った種々の値を表－1に示すとおり対応させる。

表－1

空間	L	l	$P_n(L)$	$X=\frac{\Sigma l}{L}$	$h(l)$	$\overline{k}$	μ	y	$\eta(y)$	$Y=\frac{y}{L}$	$H(Y)$	$f(z)$	$z=X+Y_1-Y_2$
時間	T	t	$P_n(T)$	$X=\frac{\Sigma t}{T}$	$g(t)$	$\overline{\lambda}$	ν	w	$\gamma(w)$	$W=\frac{w}{T}$	$G(W)$	$u(\theta)$	$\theta=X+W_1-W_2$

ここで T は計測時間，$t=l/v$ は車長速度比，$P_n(T)$ は T 時間に n 台来る確率，$X=\Sigma t/T$ は時間オキュパンシー，$g(t)$ は車長速度比が t 秒となる確率密度，$\overline{\lambda}$ は平均交通量，ν は計測時間の最初または最後に車が通過途中であるという確率，w はそのようなときあと w 秒で車が通過し終わるということ，$\gamma(w)$ は w となる確率密度，w によって影響をうける時間オキュパンシー $W=w/T$ ----(22) W となる確率密度を $G(W)$，$u(\theta)$ は時間オキュパンシー θ となる確率密度である。このうち $\nu=\int_0^{\bar{t}}\left[\int_{\xi}^{\bar{t}}g(t)dt\right]\overline{\lambda}d\xi$ ----(23) $G(W)=T\int_{TW}^{\bar{t}}g(t)/t\,dt$ ----(24) である。2のときと同様に時間オキュパンシーの確率密度は次のようにあらわされる。 $u(\theta)=(1-\nu)P_0(T)\delta(\theta)+\nu P_0(T)G(\theta)+(1-\nu)^2\sum_{n=1}^{\infty}P_n(T)\overline{u^{n*}}(\theta)+\nu(1-\nu)\sum_{n=1}^{\infty}P_n(T)\left(\overline{o}(\theta)+\overline{p}(\theta)\right)+\nu^2\sum_{n=1}^{\infty}P_n(T)\overline{q}(\theta)$ ----(25) ここで $\overline{u^{n*}}(\theta)=u^{n*}(\theta)/\int_0^1 u^{n*}(\theta)d\theta$ ----(26) $u^{n*}(\theta)$ は n 台で空間オキュパンシー θ となる確率密度である。また $o(\theta)=\int_0^{\theta}u^{n*}(X)G(\theta-X)dX$ ----(27) $p(\theta)=\int_{\theta}^{1}u^{n*}(X)G(X-\theta)dX$ ----(28) $q(\theta)=\int_0^{\theta}\left[\int_{\theta-W_1}^{\theta+\frac{\bar{t}}{T}}u^{n*}(X)G(W_1)G(X+W_1-\theta)dX\right]dW_1$ ----(29) である。

(2) 時間オキュパンシーと車長速度比の分布による交通量の表現　(25)式において $(1-\nu)P_0(T)=B$ として与えられ，車と車の間の空白の時間 m をとる確率密度を $k(m)$，車頭時間間隔 s をとる確率密度を $r(s)$ とすれば　2．(2)と同様にして交通量は $P_n(T)=\int_T^{\infty}r^{(n+1)*}(s)ds-\int_T^{\infty}r^{n*}(s)ds$ ----(30) ただし $r(s)=\int_0^s k(m)g(s-m)dm$ ----(31) $k(T)=-dB/dT$ ----(32) である。

4．むすび　本稿では厳密に考察したため，特にオキュパンシーの式などは端にかかる場合も考慮したため複雑な形となった。今後の課題としてはこれらの理論式がどの程度実用に供しうるか検討する必要がある。

[参考文献]　1) 奥谷　巖：交通量と時間オキュパンシーの特性に関する確率論的考察　土木学会論文報告集　第210号　P50～52　昭和48年2月

2) 奥谷　巖：交通情報の確率分布の相互関係　土木学会中部支部研究発表会講演集 S49