Ⅱ−20

浅水領域における海岸波浪の変形に関する研究

名古屋工業大学　正会員　石田　昭
同　大学院　学生会員　○黒田誠一

1. はしがき

浅水領域において生じる非定形波現象について、著者の一人ら[1]はその波形変化を波数－周波数スペクトルによって表示できることを示した。一方、近年になって、WelchやHarlowらによって自由表面をもつ流れの数値解法としてMAC法が開発された。この方法は流れの場を格子網でおおい、各格子内に数多くのMarker Particlesを配置して流れの状況を示そうとするものであった。その後多くの改良が加えられ、自由表面の形状を自由表面の方程式 $Dh/Dt=v$ から決定するSUMMAC法（Chan & Street）[3]などが発表された。本報告では、非定形波現象をSUMMAC法に基づいた数値シミュレーションによって検討する。

2. 基礎方程式

水のように非圧縮性で粘性の小さな流体に対して、運動方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=g_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (2)$$

又、連続式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (3)$$

である。

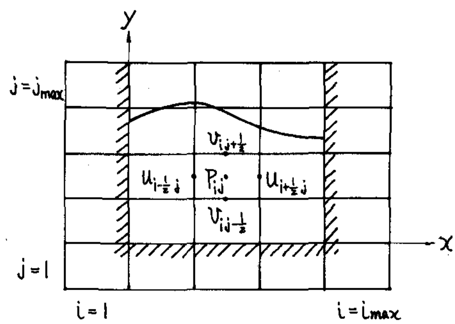

図-1 変数の配置

圧力Pの算定には、上式の第一式をx、第2式をyで、それぞれ偏微分して加え合わせ、次式で示される圧力Pに関するPoisson方程式によって求める。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=-R \qquad (4)$$

$$R=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 uv}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} \qquad (5)$$

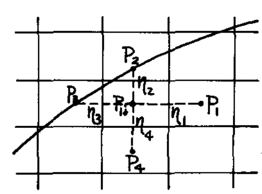

図-2 表面付近の圧力の算定

自由表面付近のCellに対しては、図－2に示すような圧力 P_1, P_2, P_3, P_4 を用いて、

$$p=\frac{\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4}{2(\eta_2\eta_4+\eta_1\eta_3)}\left[\frac{\eta_3P_1+\eta_1P_3}{\eta_1\eta_3\frac{\eta_1+\eta_3}{2}}+\frac{\eta_4P_2+\eta_2P_4}{\eta_2\eta_4\frac{\eta_2+\eta_4}{2}}+R\right] \qquad (6)$$

によって計算する。

一方、自由表面の高さhは次式によって求める。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}=v \qquad (7)$$

3. 初期条件

$t=0$ で、静水条件すなわち、

すべてのCellに対して： $u=0,\ v=0$

圧力 P：静水圧

自由表面：静水面

を初期条件として与える。

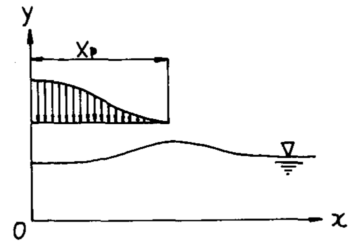

図-3 自由表面での圧力分布

4. 境界条件

$x=0$ では、free slip 条件、すなわち、$(u)_{x=0}=0,\ (\partial v/\partial x)_{x=0}=0$

$y=0$ でも同様に、$(v)_{y=0}=0,\ \ (\partial u/\partial y)_{y=0}=0$

$x=x_{max}$ では、Harlow らによって経験的に良く合うとされている Output 壁条件、すなわち、$(\partial v/\partial x)_{x=x_{max}}=0$、さらに Output 壁に接する内部Cellに対して連続式が満足されるという条件から、境界上での流速 $(u)_{x=x_{max}}$ を求める。

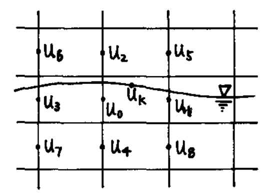

図-4 自由表面での流速の算定

自由表面の位置を(7)式で計算する際、自由表面での流速 u_K, v_K を用いるが、それらは次の内挿式によって決定する。たとえば、u_K については、Taylor 展開の2次項まで考慮して次式によって近似する。

$$u_K = u_0 + \delta x\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \delta y\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \frac{1}{2!}\left[\delta x^2\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + 2\cdot\delta x\cdot\delta y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)_0 + \delta y^2\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0\right] + \cdots\cdots$$

$$= u_0 + \left(\frac{\delta x}{\Delta x}\right)\cdot\left(\frac{u_1-u_3}{2}\right) + \left(\frac{\delta y}{\Delta y}\right)\cdot\left(\frac{u_2-u_4}{2}\right) + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{\Delta x}\right)^2\cdot(u_1+u_3-2u_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta y}{\Delta y}\right)^2\cdot(u_2+u_4-2u_0)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta x}{\Delta x}\right)\cdot\left(\frac{\delta y}{\Delta y}\right)\cdot(u_5-u_6+u_7-u_8)\right] \qquad (8)$$

流体外部のCellに対する流速は、内部Cellの流速から Gregory-Newton の内挿公式によって近似する。

自由表面での圧力に関する境界条件は、図-3のように次式で与える。

$$\left.\begin{aligned} P_a &= P_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)\left[\frac{1+\cos(\pi x/X_p)}{2}\right] & (0 \le x \le X_p) \\ P_a &= 0 & (x > X_p) \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

上式で示される圧力振動によって波を発生させるものとする。

5. 計算手順

以上の基礎方程式と境界条件を用いて、与えられた初期条件 $(u,v,P,h)_{t=0}$ から Δt 後の $(u,v,P,h)_{t=\Delta t}$ を求め、順次求められた値を用いて次の時間ステップの値を求めていく。

なお、解析結果は講演当日発表する。

［参考文献］

1) 石田 昭：造波装置による発生波の特性とその変形に関する研究，京大学位論文，昭49.6.

2) Welch, J.E., et al. : "The MAC Method," Los Alamos Sci. Lab. Rep. La-3425, 1966.

3) Chan, R.K.C., et al. : "The digital simulation of water waves — An evalution of SUMMAC," 2nd. International Conf. On Numeri. Meth. In Fluid Dyn. Pub., September, 1970.