

流出量時系列の確率的構造のモデル化

名古屋工業大学 正員 長尾正志

1. まえがき

小流域の流出特性を明確にするには、実験室ないし試験地による実態観測が重要なことはもちろんである。しかし、現実の流域は水文諸条件が極めて複雑であり、上記の分析的手法が必ずしも有用とは限らず、かなり巨視的な立場からの解析も同時に併行していかねばなるまい。本研究は、水資源の予測などの背景として、小流域の降雨量、流出量の時系列特性を考察し、その確率的構造の単純な理論モデル化を通じて、逆に流域における流出特性の確率的構造を類推しようとするものである。最近このようなモデル化について著者¹⁾、²⁾、³⁾が若干の手法を示しており、ここでは、それを発展させた形で議論を行ない、実河川への適用を通じて理論の検討を行なってみた。

2. モデル化への基礎仮定

- (1) 流出成分と季節 流出成分のうち比較的単純な低減特性に従う地下水流出ないし遅い中間流出を対象とする。したがって、季節としては晩秋ないし早春のいわゆる寒候期を取扱うものとし、ただし降水はすべて降雨であると考えておく。
- (2) 降雨時系列 取扱いの便宜を考えて、たとえば日単位などで離散化したパルス系列とし、定常確率系列と仮定する。つぎに、時刻 t における降雨量系列を P_t と記すことにする。
- (3) 流出量時系列 これは連続的の時系列と仮定し、 $x(t)$ と記す。ただし、流出現象を巨視的に考えて、上述のようにパルス化した降雨により瞬間的に上昇し、以後無降雨ならば、低減係数が一定の指数低減をする定常時系列と考える。

3. 確率的構造の理論モデル化

3.1 降雨回数分布のモデル化

ここでは、降雨時系列の特性を、降雨回数のみについてモデル化している。期間 T に n 回の降雨の起る確率を以下のポアソン分布で近似できるとする。期間 T における平均降雨回数は kT である。

$$P_T(T, n) = \exp(-kT) \cdot (kT)^n / n! \quad (1)$$

3.2 流出量時系列のモデル化

- (1) 流出量時系列の実測コレログラム まず流出量の流量時系列 $x(t)$ を使って計算されるすべての実測自己相関係数 $\rho(\tau)$ は次式で与えられる。

$$\rho(\tau) = E\{[x(t) - m_x][x(t+\tau) - m_x]\} / \sigma_x^2, \quad m_x \equiv E\{x(t)\}, \quad \sigma_x^2 \equiv E\{[x(t) - m_x]^2\} \quad (2)$$

- (2) 流出量時系列の自己共分散と理論コレログラム 以下の諸量に、いずれも定常性が成立つものと考えておく。ただし、 $x_1 = x(t)$ 、 $x_2 = x(t+\tau)$ である。

$f(x_1, x_2; i)$: 期間 $(t, t+\tau)$ で i 回降雨のある場合の x_1 と x_2 の結合密度分布

$\varepsilon(\tau, i)$: " " " " 場合の時刻 $(t+\tau)$ での増水量(流量換算量)

さて、 T 期間で i 回の降雨があり、初期流量 x_1 が x_2 となる場合の自己共分散 $\phi_i(\tau)$ は次式で求められる。

$$\phi_i(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) \cdot P_T(T, i) \cdot f(x_1, x_2; i) dx_1 dx_2 \quad (3)$$

したがって、 τ 期間で降雨、無降雨のすべてについての x_1, x_2 の自己共分散は (4) 式、さらに自己相関係数は (5) 式で計算される。ただし $\sigma_{x^2} \equiv \sigma_{x_1^2}$

$$\phi(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(\tau) \quad (4), \quad \rho(\tau) = \phi(\tau)/\phi(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(\tau)/\sigma_x^2 \quad (5)$$

こうして (2) 式の実測コレログラムと (5) 式の理論コレログラムとの対比を通じて、流出に関する確率的構造が議論されることになるが、以下では (5) 式の内容をさらに詳細に定式化してみる。

i) $i = 0$ (τ 期間に降雨がない場合) この場合、 $\varepsilon(\tau, 0) = 0, P_r(\tau, 0) = e^{-k\tau}, x_2 = x_1 e^{-a\tau}$, $f(x_1, x_2; 0) dx_1 dx_2 = f(x_1) dx_1$ より自己共分散および自己相関係数はそれぞれつぎのようになる。

$$\phi_0(\tau) = \exp\{-(k+a)\tau\} \cdot \sigma_x^2, \quad \rho_0(\tau) = \phi_0(\tau)/\sigma_x^2 = \exp\{-(k+a)\tau\}$$

ii) $i = i$ (τ 期間に i 回降雨がある場合)

右図のように、時刻 $t + \tau - \tau_i$ に大きさ r_i の降雨があるとする、増水量 $\varepsilon(\tau, i) = a \sum_{j=1}^i r_j e^{-a\tau_j}$ によつて次式が成立つ。ただし $R(\tau, 0) \equiv 0$ と定義する。

$$\phi_i(\tau)/P_r(\tau, i) = e^{-a\tau} \sigma_x^2 + R(\tau, i) \quad (6)$$

ここに $R(\tau, i)$ は、初期流量 x_1 と増水量 $\varepsilon(\tau, i)$ とに関する相互共分散で、具体的にはつぎのように表現しうるのである。

$$R(\tau, i) = \int_0^{\infty} (x_1 - m_x) dx_1 \int_{r_1=0}^{\infty} \dots \int_{r_i=0}^{\infty}$$

$$\left\{ a \sum_{j=1}^i r_j e^{-a\tau_j} \right\} a E \left\{ \sum_{j=1}^i r_j e^{-a\tau_j} \right\} d\tau_1 \dots d\tau_i \int_{\tau > \tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_i > 0} f(x_1, r_1, r_2, \dots, r_i; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_i \quad (7)$$

ここに、 $f(x_1, r_1, \dots, r_i; \tau_1, \dots, \tau_i)$ は各要素の結合密度分布を、 $\tau > \tau_1 > \dots > \tau_i > 0$ は降雨間隔 $\tau_1, \tau_2, \dots$ の積分範囲を示す。さらに詳細なモデル化も可能であろうが、ここでは、このままの形で自己共分散、自己相関係数を (4), (5) 式により求めると、 $i=0$ を含めた一般的表現として次式となる。

$$\phi(\tau) = e^{-a\tau} \sigma_x^2 + \sum_{i=0}^{\infty} P_r(\tau, i) \cdot R(\tau, i) \quad (8), \quad \rho(\tau) = e^{-a\tau} + \sum_{i=0}^{\infty} P_r(\tau, i) \cdot R(\tau, i)/\sigma_x^2 \quad (9)$$

さらに、(9) 式は以下のように表現できる。

$$\rho(\tau) = e^{-a\tau} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_{x\varepsilon}^i \{ P_r(\tau, i) \cdot \sigma(\varepsilon, i)/\sigma_x \} \quad (10), \quad \phi_{x\varepsilon}^i \equiv R(\tau, i)/\{ \sigma_x \cdot \sigma(\varepsilon, i) \} \quad (11)$$

ここに $\sigma(\varepsilon, i)$ は τ 期間に i 回降雨がある場合の増水量の標準偏差、 $\phi_{x\varepsilon}^i$ は同様な場合の初期流量 x_1 と増水量 ε との相互相関係数である。(10) 式の内容を述べると、流量の自己相関係数 $\rho(\tau)$ は、無降雨時の流量の自然伝減特性 $e^{-a\tau}$ (これは流域特性のみに依存する項) と、降雨回数を考慮した初期流量と増水量との相互相関係数の線型結合和 $\sum \phi_{x\varepsilon}^i \{ P_r(\tau, i) \cdot \sigma(\varepsilon, i)/\sigma_x \}$ (これは流域特性と降雨特性とが依存する項) とを加算したものであることを意味する。

ここで、とくに $\sigma(\varepsilon, i)$ が i に無関係であれば、それを $\sigma(\varepsilon)$ と記すことによって、(10) 式は (12) 式のようにになる。ただし、 $\phi_{x\varepsilon}$ は一般的な意味での初期流量と増水量との相互相関係数である。

$$\rho(\tau) = e^{-a\tau} + \phi_{x\varepsilon} \cdot \sigma(\varepsilon)/\sigma_x \quad (12), \quad \phi_{x\varepsilon} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \phi_{x\varepsilon}^i \cdot P_r(\tau, i) \quad (13)$$

(3) $\rho(\tau) = e^{-a\tau}$ となる条件

これは (10) 式の右边が 2 項が 1 項に比して無視しうることであり、単に数式的には幾つかの条件が対応しようが、 $|\phi_{x\varepsilon}^i| \leq 1, 0 \leq P_r(\tau, i) \leq 1, \sum_i P_r(\tau, i) = 1, 0 \leq \sigma(\varepsilon, i)/\sigma_x \leq 1$ などと考えあ

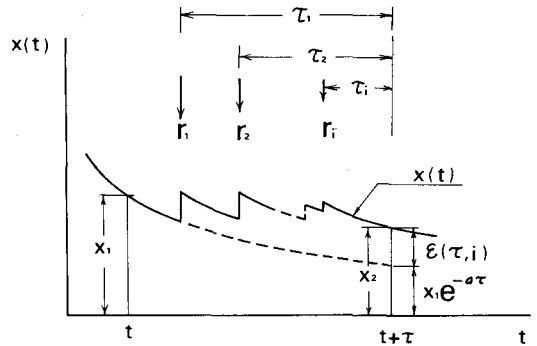


図-1 降雨量、流量時系列のモデル化

わせると、実用上重要なのは以下のケースであろう。

- $\phi_{\xi} = 0$ (無相互相関性) これには初期流量に無関係にランダムな降雨がある場合が相当する。
- $\sigma(\xi, i)/\sigma_{\xi} = 0$ (無変動性) 初期流量の変動性に比して増水量の変動性が無視しうることを意味し、これには、一定強度の降雨が継続したり、初期流量に比して微小な降雨しかない場合が相当する。

4. 実測資料への理論の適用

以上の理論を、天竜川水系三峰川上流の美和ダム流域(流域面積 311 km², 平均年降水量約 1,300 mm)に適用した結果を述べる。

4.1 降雨回数分布のモデル

いまの際、流出量に直接関与する程度の降雨が問題で、あまり少ない雨量は無意味である。種々の試算の結果、10 mm/日以上降雨日数について調べている。ところで、本流域の観測期間は 1958 ~ 1972 の 14 年間に過ぎず、分布型の適合性検討には十分とはいえない。そこで、1891 ~ 1960 の 70 年間の資料の整っている名古屋気象台の降雨資料について検討した。

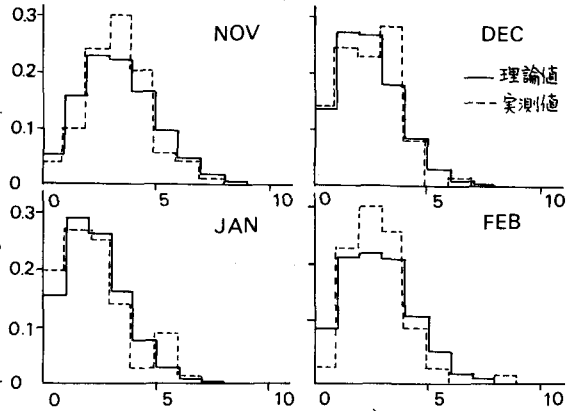


図-2 降雨回数分布 $P_n(r, i)$ の適合性

(名古屋, 1891 ~ 1960)

その一例が図-2 で、 χ^2 -検定の結果、各月について理論分布の適合が、危険率 1% で認められ、とくに図示のような寒候期にはよく適合するようであり、この傾向はそのまま美和ダム流域についてもあてはまるものである。

4.2 流量の自然低減係数

上述の理論モデルの検証には、流量の自然低減係数の的確な推定が大きな問題となる。これには、現在のところまだ確立された方法はないようであるが、考えられるのは以下のようなものであろう。

- 無降雨期間において片対数紙上に描いた流量ハイドログラフの低減曲線の勾配より求める。
- 無降雨期の流量対 (x_1, x_2) について、 $a = (\log x_1 - \log x_2) / \tau$ が成立つから、 τ を固定した計算により、平均的に a を算定する。
- ii) により、(x_1, x_2) を両対数紙上にプロットした実群の $x_1 = x_2$ 線からの平均的な隔たりから求める。
- 微小なランダム降雨期間の流量コレログラムにおいて、3.2 の (3) により $\rho(\tau) = e^{-a\tau}$ となるから、その片対数紙上への表示による低減勾配から求める。

ここで、iii) の方法は ii) と本質的に同じであるから省略し、生じた濁水期ごとの平均的な数値を求めたものが表-1 である。なお、方法 iv) では標本平均期間を 60 日としている。これより、i), ii) ではほぼ同程度の値であるが、iv) ではかなり大きい。もちろん、いまのように 311 km² という面積内で、ダムサイトだけの降雨観測のみによって、無降雨時の低減特性としての自然低減係数という本来の定義が満足されているか否か、積雪の影響など甚だ問題である。そこで、以下 i), ii) のうちで中間的な $a = 0.00889$ と iv) の $a = 0.07985$ の両方について計算をしたが、前者の場合、理論コレログラムが

方法		自然低減係数の値
i)		0.00708 day ⁻¹
ii)	$\tau = 1 \text{ day}$	0.00874
	2	0.00980
	4	0.00889
	8	0.00815
iv)		0.07985

表-1 各方法による自然低減係数の算定値

実測コレログラムよりかなり大きくなることが分った。そこで、ここでは後者のみを採用した結果を述べる。

4.3 理論コレログラムと実測コレログラムの比較

計算においては、便宜上 60 日（約 2 カ月）の資料を一標本期間、初期流量を 5 日間隔で選んで用いている。さらに、たとえば 1965 年 1 月 1 日から同年 3 月 1 日の 60 日間といった特定の期間に対する比較 A と、各年の 11 月 1 日から 12 月 30 日といった月始めからの 60 日間のコレログラムの経年平均値の比較 B という 2 方法をとっている。

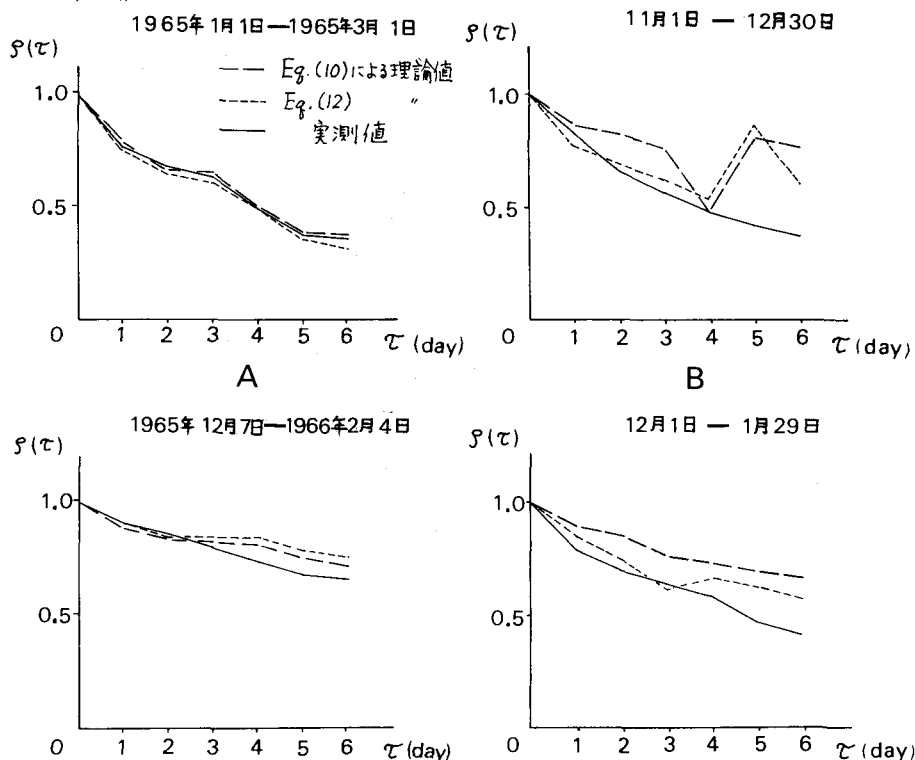


図-3 実測コレログラムと理論コレログラムの比較（美和ダム流域、 $Q = 0.07985 \text{ day}^{-1}$ ）

すなわち、Aのように特定の期間では、その間にあまり大きな降雨がなければ、理論式(10)は実測値とかなりよく合致し、ずれてが2, 3日という短い間ではとくによい。また、簡略式(12)でもある程度の近似はできそうである。しかしBのような経年平均では、その間にかなり大きな降雨が含まれる場合がよくあり、その影響でかなりの相違が、とくに式(10)でずれてが大きくなるにつれて顕著になるようである。なお、このような検討は、もう少し小面積の流域で、正確な雨量・流量観測が必須で今後その面からの整備をまって研究を続行していくつもりである。

最後に、本研究の計算資料整理に前本学学生、野々目雄一、山崎康示君の助力を得たので記して感謝しておく。

参考文献 1) 長尾正志、瀬古育二：自己相関からみた河川流出量の性格について、第22回土木学会年次講演会概要、第II部門、pp.13-1~13-2, 1967. 2) 津屋睦：河川流出量時系列の1例、石原藤次郎編「水工学」、10-3-d, pp. 459~460, 丸善, 1972.