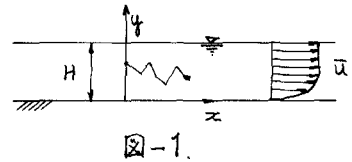


乱流拡散のシミュレーション

信州大学工学部 正員 富所 五郎

1. まえがき 一般に乱流拡散現象は, Fick の拡散方程式を¹⁾といて求められる。しかしこの方程式中の乱流拡散係数は場所の関数であって, 流速, その他の平均的特性から正確に求めることは困難である。そこで普通は, この式がとけるよう拡散係数を一定せしめたり, 流れの場を二次元と仮定するなどの単純化を行なう。しかし拡散係数を一定せしめたり, 得られた拡散係数を用いて拡散方程式をとく場合も, 特定の境界条件の場合しかとけないなど, いろいろと問題が多い。そこでここではモンテカルロ法を用いて, 直接流体塊の乱流運動をシミュレートして拡散問題をとく方法について述べる。

2. 乱流拡散のシミュレーション法 ここでは簡単のため二次元座標で考える。図-1のように, 主流方向にx軸, 鉛直方向にy軸をとると, 微小な流体塊のx軸, y軸方向の運動はそれぞれ次のようになる。



$$X_{i+1} = X_i + (\bar{u} + u'_i) \cdot \Delta t_i, \quad Y_{i+1} = Y_i + v'_i \cdot \Delta t_i \quad \dots (1)$$

X_{i+1}, Y_{i+1} ; i step後の流体塊の座標, X_i, Y_i ; 流体塊の最初の座標, u'_i, v'_i ; 流体塊の i stepにおける乱れ速度, Δt_i ; i stepにおける時間間隔, $\bar{u}$; 局所平均流速。

日野は上の乱れ特性量を乱子モデルをもとにした, 複合乱数列モデル¹⁾で与えている。このモデルでは $\sqrt{u'}$, $\sqrt{v'}$, Δt は一定, すなわち一様乱流場が仮定されている。そこで本研究では, 次の仮定をしてこのモデルをせん断乱流場に適用出来るようにする。

(1) ある場所では消滅したある階級の乱子に代って, その場所の乱れ特性量に従って新たにその階級の乱子が発生する。

(2) Δt は一定ではなく, 各階級の乱子の残存寿命時間(各乱子の寿命時間からその乱子の発生時からの経過時間をひいたもの)のうちで最小のものとする。

上の仮定をもとにして, 今 $\sqrt{u'_b} = \alpha_b \cdot U_*$, $\sqrt{v'_b} = \beta_b \cdot U_*$ とおき, 乱れ成分間の相関 $-\overline{u'_b v'_b} = (1 - y/H) U_*^2$ を考えると, 乱れ成分の式は次のもので表われる。

$$u'_i = \sum_{m=1}^N u'_m \quad ; \quad u'_m = \frac{\alpha_b \cdot U_*}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \left(\frac{u'_n}{\alpha_n} \right)^2}} \cdot \left(\frac{T(m)}{T(1)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot R_{u(m)} \quad \dots (2)$$

$$v'_i = \sum_{m=1}^N v'_m \quad ; \quad v'_m = \frac{\beta_b \cdot U_* \sqrt{1 - \frac{(1 - y/H)^2}{\alpha_b^2 \beta_b^2}}}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \left(\frac{v'_n}{\beta_n} \right)^2}} \cdot \left(\frac{T(m)}{T(1)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot R_{v(m)} - \frac{(1 - y/H)}{\alpha_b^2} \cdot u'_m \quad \dots (3)$$

n ; 乱子の階級で $m=1$ は最大乱子, N ; 乱子の階級数(日野は $N=b$), b ; 乱子発生点, T ; 乱子の寿命時間で, 最大乱子のそれより一定比で小さくしていく。 R_u, R_v ; 平均値0.0, 標準偏差1.0のGauss分布する乱数(日野は2.0), α, β ; 3. で示される乱れの強さを示す場所の関数。

計算時間が許すかぎり、 N は大きく、各階級の乱子の寿命時間の比は小さく仮定する方がよい。

3. 乱れ特性量の普遍関数表示 最近の乱れ計測技術の進歩により、開水路における乱れ計測も可能となり、多くの実験結果が発表されている。またこれらの実験結果をもとにして、乱れ特性量の普遍関数表示が提案されている。どの表示を用いるかは、シミュレーションの精度に影響を及ぼすが、それらの優劣を決めることは本論文の目的でない。そこでここでは一応、今本の提案している表示式²⁾を用いることにする。

$$\sqrt{u_*'^2} = 0.36 \cdot U_* \cdot \frac{(\bar{u}/U_*)^{1/3}}{y/H}, \quad \alpha = 0.36 \cdot \frac{(\bar{u}/U_*)^{1/3}}{y/H} \quad y/H \geq 0.7 \text{ の時} \dots (4)$$

$$\sqrt{u_*'^2} = 0.22 \cdot U_* \cdot \frac{(\bar{u}/U_*)^{1/3}}{y/H}, \quad \beta = 0.22 \cdot \frac{(\bar{u}/U_*)^{1/3}}{y/H} \quad y/H \geq 0.7 \text{ の時} \dots (5)$$

$y/H < 0.7$ の時は、 y/H に 0.1 を代入する。

(5)式は求められてはいないが、これは筆者らが Laufer の管路における空気流の実験結果を整理して求めたものである。³⁾ 次に最大乱子の寿命時間 $\tau(1)$ とラグランジエの平均時間スケール T_L との間に、 $\tau(1) = T_L$ の関係があり、さらに凍結乱流の仮定が成り立つとすると、 T_L とオイラーの平均スケール L_E との間に、 $T_L = \alpha \cdot L_E / \sqrt{u_*'^2}$ (α : 係数) の関係がある。 L_E に今本の表示式を用いると、 $\tau(1)$ は³⁾

$$\tau(1) = 0.138 \cdot \left(\frac{\bar{u}/U_*}{y/H} \right)^{3/2} \cdot \frac{y}{U_*} \quad y/H \geq 0.7 \dots (6)$$

となる。 $y/H < 0.7$ の時は、 y/H に 0.1 を代入して式を用いる。

4. 実験結果とシミュレーション結果の比較 Lean は幅 1.5m、長さ 105m の水路に水深 45cm で水を流れ、入口より約 45m の付近で、粒径 0.16mm、0.27mm、0.46mm の粒子を表面に投下し、それらの平均到達距離 $\bar{x}$ 、およびそのばらつき $(x-\bar{x})^2/\bar{x}^2$ を求めている。この時の平均流速は 21cm/sec で、 $U_* = 1cm/sec$ で、実験結果を表-1に示す。この実験を上記のべた乱流拡散のシミュレーション法によりシミュレートして結果を求め比較してみる。ただしこの場合粒子は、数mm と考えられる最小乱子の径より小さいので、完全に乱れに従うものと考え、また(2)式の y 軸方向の運動には、粒子の沈降速度による項を加える。階級数は $N=9$ とし、各階級の寿命時間の比は 1.5 とした。結果を表-1に示す。おじの評いいことは、講演時に発表する。

実験番号	粒子沈降速度 W (cm/sec)	平均到達距離 $\bar{x}$ (cm)	粒子のばらつき $(x-\bar{x})^2/\bar{x}^2$	シミュレーション結果	
				$\bar{x}$ (cm)	$(x-\bar{x})^2/\bar{x}^2$
1	1.60	600	0.058	602	0.057
2	3.05	300	0.082	302	0.114
3	3.80	240	0.079	259	0.044

表-1

1) 日野“モンカルロ法による乱流拡散の二・三の計算について”第9回水理講演会論文集, 1965.

2) 今本“開水路流れの乱れに関する水理学的研究”京都大学学位論文

3) 稲津“円管路における粒子濃度分布に関する研究”京都大学卒業論文, 1973年3月.

4) G.H. Lean “The Settling Velocity of Particles in Channel Flow” STOCHASTIC HYDRAULICS Edited by CHAO-LIN CHIU