

弾塑性基礎上のはりと格子の極限解析

信州大学 正会員 草間 孝志

漸増荷重をうける弾塑性基礎上のはりの挙動を弾性状態から崩壊にいたるまで、逐次解析して解を追跡することは、単純な荷重状態の場合でも結構面倒であるが、崩壊荷重は比較的簡単に求めることができる。本報告は弾塑性基礎上のはりと格子の崩壊荷重を上界定理を用いて求める方法を検討し、計算例について述べたものである。

1. 用いた仮定 はりに対しては通常の極限解析に用いられている仮定がそのままなりたつものとする。つぎに、基礎に対しては2つの場合について仮定を設けた。1つは図-1 (a) に示すように負反力が生ずる基礎であり、もう1つは (b) に示すように負反力が生じない基礎である。崩壊荷重の計算には、弾性定数は関係しない、それゆえ、(a)、(b) いづれの場合も図示のように剛塑性とした。

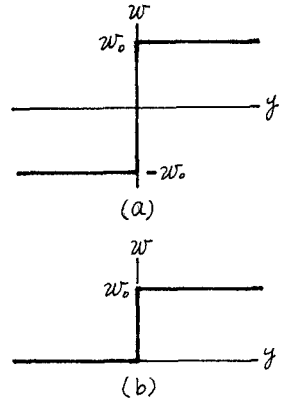


図-1 基礎反力~変位関係

2. 弾塑性基礎上のはりの崩壊時における仮想仕事式と仮想変形法
いま、左側の荷重とたわみを P_i, y_i とし、右側の塑性ヒンジ回転角と全塑性モーメントを θ_k, M_{pk} 、単位長さあたりの基礎の極限支持力を w_0 、想定した崩壊形に対するはりの変位を y 、基礎が降伏した部分の長さを l 、はりの要素の長さを ds とし、基礎もはり同様系の一部とすると次式がなりたつ。

$$\sum P_i y_i = \sum M_{pk} \theta_k + \int_l w_0 y ds \quad (1)$$

なお、証明は省略するが、弾塑性基礎上のはりの場合にも崩壊荷重に対する上界定理が得られる。弾塑性基礎上のはりの崩壊荷重の計算は上界定理によるのが適当と考えられる。なぜならは機構を想定することによって、基礎反力の分布がわかり式 (1) (またはつり合い式) を簡単に得ることができるからである。いま、想定した崩壊形に対して n 個の部分で基礎が降伏したとし、それぞれの長さを l_j とすると $l = \sum_{j=1}^n l_j$ 、よって、 l_j 部分の極限支持力を w_{0j} とすると式 (1) はつぎようになる。

$$\sum P_i y_i = \sum M_{pk} \theta_k + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} w_{0j} y ds \quad (2)$$

仮想変形法によって崩壊荷重を求めるには、上界定理と式 (2) を用いて、つぎの手順による。

- (1) 崩壊形を想定し、基礎が降伏していると仮定した n 個の l_j のうち m 個が未知の場合には、それぞれ長さを l_j ($j = 1, 2, \dots, m$) とおく。
- (2) 崩壊形をもとに式 (2) を計算する。
- (3) 上界定理より荷重 P が最小になるように、式 (2) を l_j ($j = 1, 2, \dots, m$) で微分し、 $\partial P / \partial l_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) より m 個の式を得る。
- (4) この m 個の式と式 (2) より未知の l_j と荷重 P の上界値を得る。
- (5) 真の P_u は想定した崩壊形に対する荷重の中の最小値である。ただし、 l_j が幾何学的に崩壊形を満足するものでなければならない。
- (6) 解の吟味は塑性条件による。

3. 計算例. 図-2は弾塑性基礎上の格子構造で、基礎は負反力に抵抗せず、等質で w_0 は一定、部材の M_p も一定とし、ねじりは無視する。図示の荷重状態に対する崩壊荷重を求めよう。図の (a) ~ (d) の4つの崩壊形が考えられる。(d) の崩壊形について詳述すると、基礎が降伏した長さ z_1, z_2 が未知である。仮想仕事式より

$$4Pz_1 = 2w_0(z_1^2 + z_1 z_2) + 4M_p\left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right)$$

上式を z_2 で微分し $\partial P / \partial z_2 = 0$ とおくと

$$4P = 2w_0(2z_1 + z_2) + 4M_p \frac{1}{z_2}$$

同様に $\partial P / \partial z_1 = 0$ とおくと

$$0 = 2w_0 z_1 - 4M_p \frac{z_1}{z_2^2}$$

これら3式より

$$z_1 = z_2 = \sqrt{\frac{2M_p}{w_0}}, \quad P = \sqrt{8w_0 M_p}$$

を得る。他の崩壊形についても全く同様に計算することができる。真の崩壊荷重はそれらの中の最小値である。ただし、 $z_1 \leq L_1/2, z_2 \leq L_2/2$ を満足しなければならない。図-3は L_1, L_2 の大きさによって真の崩壊荷重を分類したもので、たとえば $L_1 \geq \sqrt{8M_p/w_0}, L_2 \leq \sqrt{8M_p/w_0}$ ならば (b) の機構で崩壊することを示している。

4. 結言. 前述の計算例は建築基礎などを想定した計算例で、実際問題としては材料の延性の他、せん断力の影響など多くの問題点があると考えられる。

なお、本法は多くの横桁によって支持された主桁の極限解析にも適用することができるが、詳細は当日報告する。

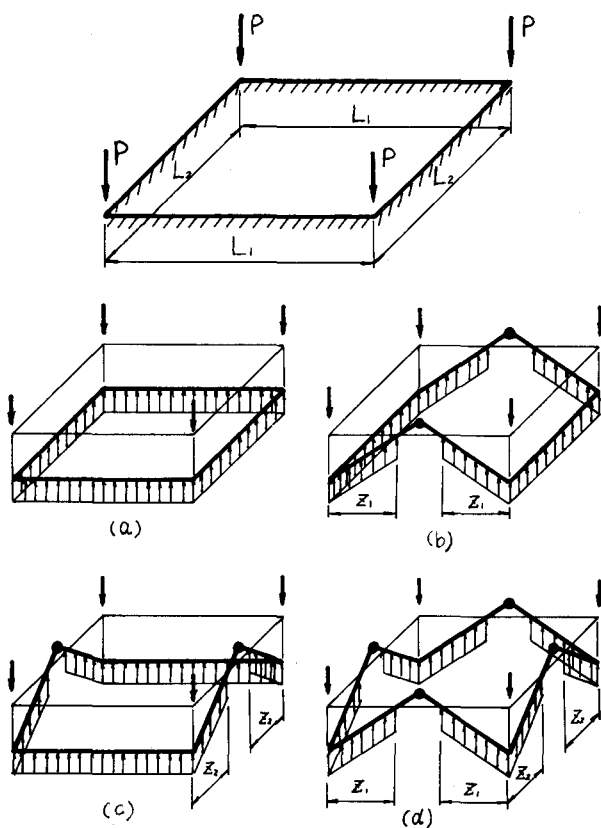


図-2

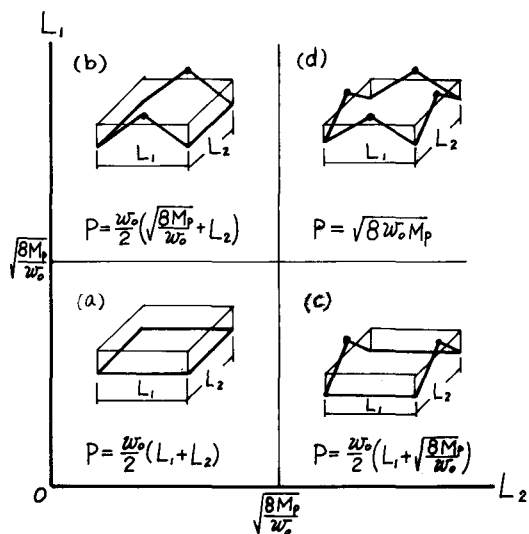


図-3