

頂部を鋼棒または鋼線で連結されたパイルグループの解析

信州大学 正会員 吉沢孝和
信州大学 学生員 ○高村 裕

1. 研究の目的

本研究は 長さの異なる数本の高張力鋼線群によって頂部を相互に連結して構成されるパイルグループを地すべり地帯に打ちこみ 高張力鋼線群によってパイルグループに生ずる非線型的な変形挙動を利用して地すべりや山崩れ等の制御を図ろうとするのが目的である。本文では このような系の基礎研究としてパイルグループの単純モデルの解析を行なっている。さらにこの解法において高張力鋼線の自重による張力を考慮し またパイルの曲げ剛性を鉄塔の曲げ剛性におきかえれば 実際の送電用鉄塔系の解析にも応用できるものである。

2. 解析上の仮定

- 1) パイル および高張力鋼線はその全長にわたって一様断面を有する。
- 2) 高張力鋼線の自重は無視する。従って 高張力鋼線がたるんでいる場合には張力は生じないものとし 高張力鋼線が初期の長さより引き伸ばされたときのみ張力が作用する。
- 3) パイル および高張力鋼線の変形は微小変形理論に従うものとする。

3. 基本解析式の誘導

パイル および高張力鋼線の解析において用いられる基本式は次式で表わされる：

$$\begin{bmatrix} u \\ F \\ w \\ \alpha \\ M \\ S \end{bmatrix} = \text{diag} \left[\frac{L}{EA} \quad 1 \quad \frac{L^3}{6EI} \quad \frac{L^2}{6EI} \quad -\frac{L}{3} \quad -1 \right] \begin{bmatrix} 1 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & P & P^2 & P^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2P & 3P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{N} + \langle \mathbf{K} \rangle] \quad (1)$$

u = 軸方向変位 F = 軸力 w = たわみ α = たわみ角 M = 曲げモーメント
 S = せん断力 $P = \pi/L$ = 無次元座標 $\mathbf{N}$ = 固有マトリクス $\mathbf{K}$ = 荷重マトリクス

$$\begin{bmatrix} v \\ T \end{bmatrix} = \text{diag} \left[\frac{\alpha_i L_{or}}{E_i A_i} \quad 1 \right] \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

v = 高張力鋼線ののび T = 高張力鋼線の張力 $k = \gamma/L_{or}$ = 無次元座標

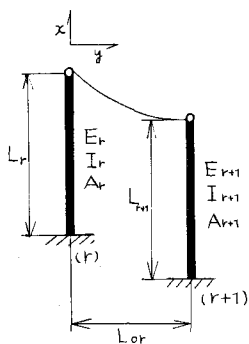


図1. 系の諸元

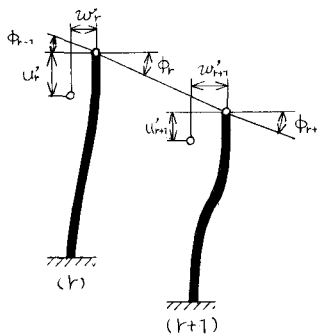


図2. 変位ベクトル

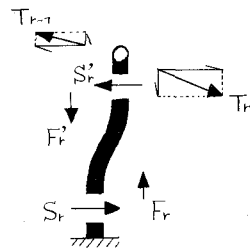


図3. カベクトル

境界条件はパイルの上、下端においてそれぞれ：

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ \theta \end{bmatrix}_{P=0} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} F \\ M \\ S \end{bmatrix}_{P=P_i} + \begin{bmatrix} \sin \phi \\ 0 \\ -\cos \phi \end{bmatrix} \sum T_{ri} - \begin{bmatrix} \sin \phi \\ 0 \\ -\cos \phi \end{bmatrix} \sum T_{r-1,i} = 0 \quad (4)$$

固有マトリクスの要素を $\{a \ b \ c \ d \ e \ f\}$ とすると式(3)より $a = c = d = 0$ となる。おの spans の鋼線群の i 番目の要素線材の引張力はパイル頂部の変位ベクトルを用いると次式のようなになる：

$$\begin{aligned} T_{ri} &= (E_i A_i / \alpha_i L_{or})_r \cdot d L_{ri} \\ &= (E_i A_i / \alpha_i L_{or})_r \cdot \{ [-\sin \phi_r]_r \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_{r+1} - [-\sin \phi_r]_r \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}_r - (\alpha_{ri} - 1) L_{or} \} \\ &= [-\sin \phi_r]_r \left\{ \begin{bmatrix} S'_{ri} & 0 \\ 0 & P'_{ri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2f \end{bmatrix}_{r+1} - \begin{bmatrix} S'_{ri} & 0 \\ 0 & P'_{ri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2f \end{bmatrix}_r \right\} \\ &\quad + [-\sin \phi_r]_r \left\{ \begin{bmatrix} S'_{ri} & 0 \\ 0 & P'_{ri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \langle \mathbf{K} \rangle_{r+1} - \begin{bmatrix} S'_{ri} & 0 \\ 0 & P'_{ri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \langle \mathbf{K} \rangle_r \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに} \quad S_{ri} &= (E_i A_i / \alpha_i L_{or})_r \cdot (L / EA)_r, \quad P_{ri} = (E_i A_i / \alpha_i L_{or})_r \cdot (L^3 / 6EI)_r \\ S'_{ri} &= (E_i A_i / \alpha_i L_{or})_r \cdot (L / EA)_{r+1}, \quad P'_{ri} = (E_i A_i / \alpha_i L_{or})_r \cdot (L^3 / 6EI)_{r+1} \\ \phi_{ri} &= (EA \cdot (\alpha_i - 1) / \alpha_i)_r, \quad \sin \phi_r = \sin \phi_r, \quad \cos \phi_r = \cos \phi_r, \end{aligned}$$

r 番目のパイル頂部の軸力とせん断力を $\{F \ S\}_r$ として 式(5)の $\{b \ f\}$ を表わせば：

$$\begin{bmatrix} b \\ f \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} F \\ -S \end{bmatrix}_r - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \langle \mathbf{K} \rangle_r \quad (6)$$

式(5)に式(6)を代入して整理し、その結果を式(4)に代入すると次式のような関係を得る：

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} \text{sn}^2 & -\text{cs} \cdot \text{sn} \\ -\text{cs} \cdot \text{sn} & \text{cs}^2 \end{bmatrix} \sum_{r-1} \begin{bmatrix} \text{S} & 0 \\ 0 & 2\text{p} \end{bmatrix}_{r-1,i} \begin{bmatrix} \text{F} \\ \text{S} \end{bmatrix}_{r-1} - \begin{bmatrix} \text{sn}^2 & -\text{cs} \cdot \text{sn} \\ -\text{cs} \cdot \text{sn} & \text{cs}^2 \end{bmatrix} \sum_r \begin{bmatrix} \text{S} & 0 \\ 0 & 2\text{p} \end{bmatrix}_{ri} \begin{bmatrix} \text{F} \\ \text{S} \end{bmatrix}_{r+1} \\
& + \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{sn}^2 & -\text{cs} \cdot \text{sn} \\ -\text{cs} \cdot \text{sn} & \text{cs}^2 \end{bmatrix} \sum_r \begin{bmatrix} \text{S} & 0 \\ 0 & 2\text{p} \end{bmatrix}_{ri} + \begin{bmatrix} \text{sn}^2 & -\text{cs} \cdot \text{sn} \\ -\text{cs} \cdot \text{sn} & \text{cs}^2 \end{bmatrix} \sum_{r-1} \begin{bmatrix} \text{S} & 0 \\ 0 & 2\text{p} \end{bmatrix}_{r-1,i} \right] \begin{bmatrix} \text{F} \\ \text{S} \end{bmatrix}_r \\
& - \begin{bmatrix} \text{sn}^2 & -\text{cs} \cdot \text{sn} \\ -\text{cs} \cdot \text{sn} & \text{cs}^2 \end{bmatrix} \sum_{r-1} \begin{bmatrix} \text{S} & 0 \\ 0 & \text{p} \end{bmatrix}_{r-1,i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \langle \text{K} \rangle_{r-1} - \begin{bmatrix} \text{sn}^2 & -\text{cs} \cdot \text{sn} \\ -\text{cs} \cdot \text{sn} & \text{cs}^2 \end{bmatrix} \sum_r \begin{bmatrix} \text{S} & 0 \\ 0 & \text{p} \end{bmatrix}_{ri} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \langle \text{K} \rangle_{r+1} \\
& + \left[\begin{bmatrix} \text{sn}^2 & -\text{cs} \cdot \text{sn} \\ -\text{cs} \cdot \text{sn} & \text{cs}^2 \end{bmatrix} \sum_r \begin{bmatrix} \text{S} & 0 \\ 0 & \text{p} \end{bmatrix}_{ri} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{sn}^2 & -\text{cs} \cdot \text{sn} \\ -\text{cs} \cdot \text{sn} & \text{cs}^2 \end{bmatrix} \sum_{r-1} \begin{bmatrix} \text{S} & 0 \\ 0 & \text{p} \end{bmatrix}_{r-1,i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \langle \text{K} \rangle_r \\
& + \begin{bmatrix} \text{sn} \\ -\text{cs} \end{bmatrix} \sum_{r-1} \text{g}_{r-1,i} - \begin{bmatrix} \text{sn} \\ -\text{cs} \end{bmatrix} \sum_r \text{g}_{ri} = 0 \tag{7}
\end{aligned}$$

式(7)が求めるせん断力と軸力に関する基本解析式である。

特に $\phi_r = 0$ として式(7)に代入すると次式を得る：

$$\begin{aligned}
& -2\sum \text{p}_{r-1,i} \text{S}_{r-1} + \{1 + 2\sum \text{p}_{ri} + 2\sum \text{p}'_{r-1,i}\} \text{S}_r - 2\sum \text{p}'_{ri} \text{S}_{r+1} \\
& - \sum \text{p}_{r-1,i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \langle \text{K} \rangle_{r-1} - (\sum \text{p}_{ri} + \sum \text{p}'_{r-1,i}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \langle \text{K} \rangle_r \\
& - \sum \text{p}'_{ri} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \langle \text{K} \rangle_{r+1} - \sum \text{g}_{r-1,i} + \sum \text{g}_{ri} = 0 \tag{8}
\end{aligned}$$

$$F_r = 0 \tag{9}$$

ここにおいて 式(8)はパイルの軸力の作用しないときのせん断力の関係を示しており 本文ではこれを 頂部連結パイルの三連せん断力方程式と定義する。また 上端のたわみを w としてあらわせば式(10)のような三連たわみ式を得る。

$$\begin{aligned}
& \{(6EI/L^3)_{r-1} \cdot 2\sum \text{p}_{r-1,i}\} w_{r-1} - (6EI/L^3)_r \{1 + 2\sum (\text{p}'_{r-1,i} + \text{p}_{ri})\} w_r \\
& + \{(6EI/L^3)_{r+1} \cdot 2\sum \text{p}'_{ri}\} w_{r+1} \\
& = \sum \text{p}_{r-1,i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \langle \text{K} \rangle_{r-1} - \{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \sum (\text{p}'_{r-1,i} + \text{p}_{ri}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \} \langle \text{K} \rangle_r \\
& + \sum \text{p}'_{ri} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \langle \text{K} \rangle_{r+1} + \sum \text{g}_{r-1,i} - \sum \text{g}_{ri} \tag{10}
\end{aligned}$$

4. 計算例

図のような5連のパイルグループの最右端のパイルの中央に荷重を作用させた場合を考える

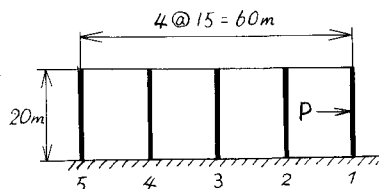
鋼線のE, Aをそれぞれ $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, 10 cm^2

パイルのE, Iをそれぞれ $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $(30^4 - 28^4)/12 \text{ cm}^4$

P_i S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 [kg]

2 -624.5 0.3809 0.2854 0.1907 0.0950

4 -1249 0.7618 0.5708 0.3802 0.1900



5. 頂部が水平で下端が弾性体中にあるパイルグループの解析

弾性体中におけるパイルの状態ベクトルは次式であらわされる:

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix} = \text{diag} \left[\frac{L^3}{2\beta^2 EI}, \frac{L^2}{2\beta EI}, \frac{L}{\beta}, -1 \right] \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ \psi_1 - \psi_2 & \psi_1 + \psi_2 & -\psi_3 - \psi_4 & \psi_3 - \psi_4 \\ -\psi_2 & \psi_1 & \psi_4 & -\psi_3 \\ -\psi_1 - \psi_2 & \psi_1 - \psi_2 & \psi_3 + \psi_4 & \psi_3 + \psi_4 \end{bmatrix} [D] + \langle K \rangle \quad (11)$$

ここに $\psi_1 = e^{\beta p} \cos \beta p$ $\psi_2 = e^{\beta p} \sin \beta p$ $\beta = \sqrt{\frac{KL^2}{4EI}}$ $K = \text{地盤係数}$
 $\psi_3 = e^{-\beta p} \cos \beta p$ $\psi_4 = e^{-\beta p} \sin \beta p$

境界条件はパイルの下端, 上端 結合点でそれぞれ:

$$\begin{bmatrix} M \\ S \end{bmatrix}_1 = 0 \quad (12) \quad -\begin{bmatrix} M \\ S \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ T_r - T_{r-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix}_2 \quad (14)$$

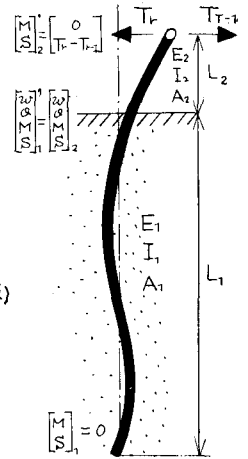


図4

添字の1, 2はそれぞれ 弾性体中, 地上のパイルを示す

式(11)のマトリクス[D]の要素を $\{a \ b \ m \ n\}$ として 境界条件を処理すると
 次式のような n に関する三連方程式を得ることかできる:

$$(a_n)_{r-1} - (b_n)_r + (c_n)_{r+1} - \sum g_{r,i} - \sum g_{r+1,i} = [U\langle K \rangle]_{r-1} - [V\langle K \rangle]_r + [W\langle K \rangle]_{r+1} \quad (15)$$

$$a = APJ, \quad b = BPJ, \quad c = CPJ, \quad K = \langle K_2 \rangle + P\langle K \rangle$$

$$U = A - API, \quad V = B - BPI, \quad W = C - CPI, \quad J = \begin{bmatrix} 2S/t & 1 & -S/t & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \sum p_{r,i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \sum p_{r+1,i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_r = \sum p_{r,i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{r+1} = \sum p_{r+1,i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \text{diag} \left[\frac{6E_2 I_2}{L_2^3}, \frac{L_2^2}{2\beta^2 EI_2}, \frac{6E_2 I_2}{L_2^3}, \frac{L_2^2}{2\beta^2 EI_2}, \frac{3}{L_2}, \frac{L_2}{\beta}, 1 \right] \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ \psi_1 - \psi_2 & \psi_1 + \psi_2 & -\psi_3 - \psi_4 & \psi_3 - \psi_4 \\ -\psi_2 & \psi_1 & \psi_4 & -\psi_3 \\ -\psi_1 - \psi_2 & \psi_1 - \psi_2 & \psi_3 + \psi_4 & \psi_3 + \psi_4 \end{bmatrix}$$

$$II = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/t & 3/t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/t & 3/t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t = [0 \ 0 \ 7 \ 3] P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = [0 \ 0 \ 7 \ 3] P \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

頂部が鋼線によって水平に連結され, 下端が弾性体中にあるパイルグループの状態ベクトルは式(15)のマトリクス要素 n の値を導くことによって求めることかできる。