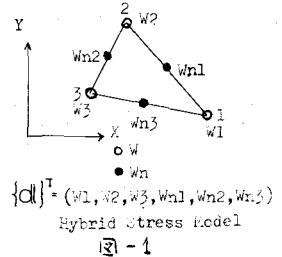


ハイブリッド要素を用いた板の極限解析について

名古屋大学 工学部 学生員・藤井文夫

" " 正員 梶田達夫

1. まえがき 面外荷重をうける平板の弾塑性解析は、古くより種々の研究者によって扱われてきており、L.A.LopezやV.V.Sokolovskiyらが多くの論文を發表している。また、曲げ面荷力の計算を目的としたものとしては、Johansenの関節線(降伏線)理論が最も有名であるが、これは材料の剛完全塑性を仮定しているために、崩壊メカニズムに至るまでの荷重変形関係を求めることはできない。これらに対して、FEMを用いた弾塑性解析が近年多く行なわれている。これらのうち、G.M.McNeiceは、4節点12自由度の長方形曲げ要素を用い、塑性ロッキングの概念を導入することにより極限面荷力の解析を行なった。また、J.Bäcklundは、Herrmannの混合要素を用いて、RC床版の上限極限荷重を計算し、関節線理論の解と比較している。ここでは、以ての考え方を拡張して、ハイブリッド要素を用いた関節線理論の定式化を試みたものである。計算で用いられた板曲げ要素は、図-1に示す節点配置を6自由度もち、要素内で応力が一定のハイブリッド応力モデルである。この要素の詳細は参考文献を参照されたい。



2. 計算方法 計算にあたってはつぎのような仮定を設けた。①関節線は、要素内部を通過することなく常に要素境界にとどまり、またその登には、要素間のたわみ角の不連続(塑性回転角)の導入により示される。②要素内は常に弾性状態にあり、要素内の応力 $\{\sigma_{xy}\}$ 、 $\{\sigma_n\}$ と節点変位 $\{dl\}$ との間には常につぎの関係式が成立する。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{(3,6)} \\ G_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dl \\ \end{Bmatrix} \quad (2-1)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{(3,6)} \\ G_{(6,6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dl \\ \end{Bmatrix} \quad (2-2)$$

$$\text{ここに: } \{\sigma_{xy}\}^T = (M_x, M_y, M_{xy})$$

$$\{\sigma_n\}^T = (M_{n1}, M_{n2}, M_{n3})$$

$[F]$ 、 $[G]$ は、要素の節点変位より、要素内の応力を求める行列である。

③塑性ロッキングの生じない要素近は、板全体が運動学的メカニズムに至るまで、十分な塑性変形能力を有する。

計算は、Step by Stepで行われ、各荷重段階において、V.Misesの降伏条件により降伏が判定された要素には、新しい節点変位として塑性回転角 θ_p が導入される。 θ_p を導入する要素近は、その要素の降伏時に、最大曲げモーメントを有する近、すなわち最大主曲げモーメントの方向に最も近い近とする。この計算には(2-2)が用いられる。つぎのStepのはじめに、前段階で導入された θ_p と新たな未知数としてもつ連立方程式の必要な係数を決めなければならない。一般に、 N stepのはじめで解くべき連立方程式の係数行列は図-2のようである。 $[K_e]$ は弾性計算のStep($N=1$)における($N_e \times N_e$)の剛性行列である。部分行列 $[K_p]$ は、 $(N-1)$ stepの終りまでに導入された θ_p の各節点におけるつり合い条件への関与を表わし、その係数は、 θ_p とその近の弾性変位成分 w_n と同等に扱うことに

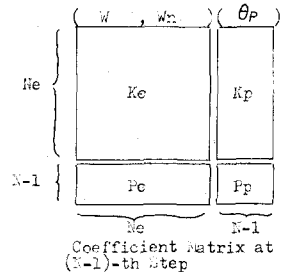


図-2

より要素の剛性行列より容易に決めることができる。[Kp]の一つの列には高々6個の係数が現れない。[Ipe]および[Ipe]は、降伏した要素の塑性変形を記述する部分行列である。従来のFEMを使った弾塑性解析においては、v. Misesの降伏条件に付随した一連の条件式より導かれた応力歪関係式を、塑性域に入った要素について（用いるのが一般的であるが、ここでは塑性歪の発生を許さないことがよく仮定④）、そのうちの一つの条件式

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \epsilon} d\epsilon = 0 \quad (2-3)$$

のみを考慮することにする。いま(2-3)を、材料の完全塑性の仮定のもとで行列表示すると

$$(M_x - \frac{1}{2}M_y, M_y - \frac{1}{2}M_x, 3M_{xy}) d \begin{Bmatrix} \theta_{xy} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2-4)$$

となる。応力増分 $d\{\sigma_{xy}\}$ は、仮定④のもとで式(3-1)により、節点変位増分 $d\{\alpha\}$ と結びいているので(2-4)はつぎのようになる。

$$C_{(6,1)} d\{\alpha\} = 0 \quad (2-5)$$

$$\text{ここに: } C_{(i,6)} = (M_x - \frac{1}{2}M_y, M_y - \frac{1}{2}M_x, 3M_{xy}) [I]_{(i,6)}$$

$$(2-6)$$

Cは、降伏した要素の応力状態に依存した6個の係数を含む行ベクトルである。[Ipe]の各行について（各塑性要素について）Cを求め、その6個の係数と、節点変位の対応する列に代入すれば[Ipe]は決まる。[Ipe]は対角行列で、その0と同一連の弾性変位成分に対応するCの係数をもってくる。以上の理論展開は、塑性域に入った板の新しい変形モードを記述するために必要な塑性回転角という新しい自由度を導入して定式化しているものであるが、これによれば、崩壊に至るまでの板の弾塑性挙動とある程度追跡することが可能である。

3. 計算例 および あらざき 図-3, 4, 5は、それぞれ、等分布荷重をかける周辺単純支持の正方形板、周辺固定の正方形板、および周辺単純支持の長方形板の例である。他の多くの計算例、関節解理論および弾塑性解との比較、さらにはRC板への応用については、講演当日に発表する予定である。

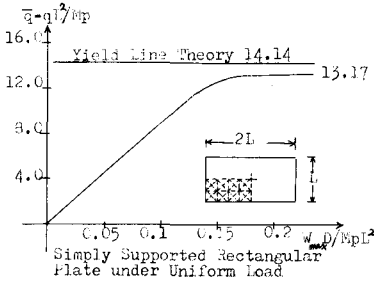


図-5

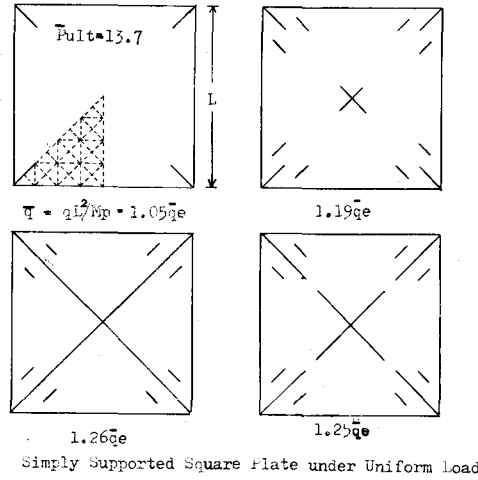


図-3

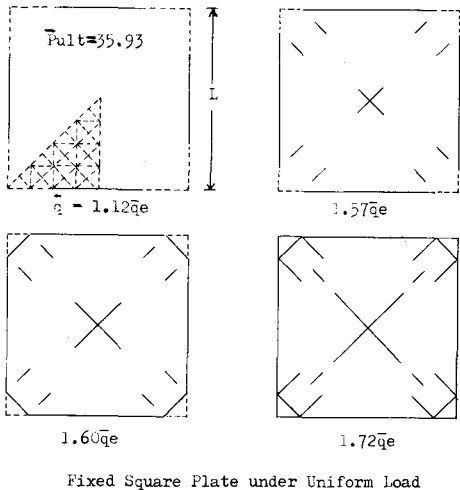


図-4

参考文献

山田嘉昭編 「マトリックス法の応用」 東大出版会 1972年