

円錐角をもちた杭の支持力に就いて (其の3)

名城大学理工学部土木工学科 正会員 柴田道生  
 名城大学理工学部土木工学科の正会員 阿河武志

(1) 緒言

前回は、杭を本体部と先端部に分けて、その上昇波、並びに下降波に就いて、誘導式を示した。而して、杭本体を伝播する応力波は、先端部の円錐体で乱反射し、その解析が複雑になるので、上昇波は、円錐体の角度と、地盤係数の函数のみに左右すると考へて、時刻の経過による杭先端部の歪、並びに応力の式を誘導することを示す。

(2) 応力波の理論式

先ず杭本体の方程式は 
$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \quad \mu = f_1(at-x) + f_2(at+x) \text{----- (1)}$$

円錐先端部の方程式は 
$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - n^2 U \right) \text{----- (2)}$$

但し  $U = e^{nx} \mu$  である。

従つて 
$$\frac{\partial U}{\partial x} = ne^{nx} \mu + e^{nx} \frac{\partial \mu}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = e^{nx} \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + 2n \frac{\partial \mu}{\partial x} + n^2 \mu \right) \text{----- (3)}$$

(3)式を(2)式に代入して整理すると。

$$\frac{\partial^2 \mu_2}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial x^2} + 2n \frac{\partial \mu_2}{\partial x} \right) \text{----- (4)}$$

(4)式を求めた方程式で この式の一般解は

$$\begin{aligned} \mu_2(x,t) = & \frac{1}{2} e^{-nx} \{ F_1(at-x) + F_2(at+x) \} + \frac{e^{-nx} \int_{at-x}^{at+x} \{ F(\lambda) + n f(\lambda) \} I_0 \left\{ 2\sqrt{c(x+at-\lambda)(x-at+\lambda)} \right\} d\lambda}{2a} \\ & + \sqrt{c} \int_{at-x}^{at+x} \frac{f(\lambda) I_1 \left\{ 2\sqrt{c(x+at-\lambda)(x-at+\lambda)} \right\}}{\sqrt{(at+x-\lambda)(at-x+\lambda)}} d\lambda \text{----- (5)} \end{aligned}$$

但し  $\mu(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial \mu(x,0)}{\partial t} = F(x)$

(5)式の第1項は、波形がくずれず、第2項第3項は波形がくずれる場合を示して置ける

(5)式の第1項のみを採り 
$$\mu(x,t) = \frac{1}{2} e^{-nx} \{ F_1(at-x) + F_2(at+x) \} \text{とす。----- (6)}$$

但し、 $f_1, f_2$  は本体の上昇波、下降波を表はし、 $F_1, F_2$  は、円錐部の上昇波、下降波である。

其中、 $n = \frac{1}{2l_0} \log \frac{S_1}{S_2}$  (形状率)  $l_0$ 、円錐部長さ、 $S_1, S_2$ 、円錐部の上、下両端の断面積、

$a$ :伝播速度で  $a = \frac{Eg}{\rho}$  である。

(3) 境界条件

Fig.1に示すように、杭頭には、衝撃力に等しい力が発生するから、杭本体と、先端部の方程式は、次の(7)式

(8)式の5;になる。即ち 
$$AE \frac{\partial \mu_1}{\partial x} = -\frac{W}{g} \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} \text{----- (7)}$$

$$e^{nx} AE \frac{\partial \mu_2}{\partial x} = -\frac{R}{g} \frac{\partial^2 \mu_2}{\partial t^2} \text{----- (8)}$$

いま  $m = \frac{W}{Agl_2}, \quad m' = \frac{W-U}{Ag'l_1}, \quad W-U = R$  と  $U$  は杭の動的摩擦抵抗を示す。

従つて、(7) (8)式は、次のようになる。

$$ml_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \quad \text{----- (9)}$$

$$e^{nl_1} m l_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{----- (10)}$$

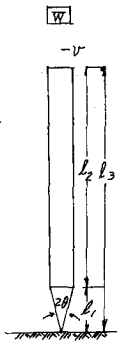
又、衝撃体の杭に衝突する瞬間では、 $t=0$ 、 $x=0 \sim l_1, l_2$  の範囲では、

$$u_{1,2} = \frac{\partial u_{1,2}}{\partial t} = 0 \quad \text{----- (11)}$$

又、 $x=l_2$  では、衝撃の瞬間に、杭端の速度が、衝撃体の速度に等しくなるから

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)_{x=0} = -v \quad \text{----- (12)}$$

Fig. 1.



(3) 下降波(杭本体)の決定。

$x=l_2$  では、衝突を意味し、 $x=0$  では、下降波の先端に達したことになる。

そこで、(1)式を(10)式に代入して、 $at+l_2=z$  とすると、

$$f_2''(z) + \frac{1}{ml_2} f_2'(z) = -f_1''(z-2l) + \frac{1}{ml} f_1'(z-2l) \quad \text{----- (13)}$$

つまり、(13)式の値を  $Q_z$  とおくと、 $f_2'(z)$  に就いての一般解は、

$$f_2'(z) = e^{-\frac{z}{ml_2}} \left( \int e^{\frac{z}{ml_2}} Q_z dz + C \right) \quad \text{----- (14)}$$

$$f_2(z) = C e^{-\frac{z}{ml_2}} \quad \text{----- (15)}$$

(15)式の積分定数  $C$  は(12)式で決定される。

$$af_2'(l) = -v \quad \text{----- (16)}$$

$$f_2'(z) = -\frac{v}{a} = C e^{-\frac{z}{ml_2}} \quad C = -\frac{v}{a} e^{\frac{l}{ml_2}} \quad \text{----- (17)}$$

(17)式を(15)式に代入すると、 $f_2'(z) = -\frac{v}{a} e^{-\frac{z-l}{ml_2}} \quad \text{----- (18)}$

(18)式を積分して積分定数  $C$  を定めると

$$f_2(z) = \frac{ml_2 v}{a} \left( e^{-\frac{z-l}{ml_2}} - 1 \right) \quad \text{----- (19)}$$

(4) 下降波(左端部)の決定。

上述の(6)式を(8)式に代入して、 $at+l_1=z$  とおくと、

$$\frac{a^2 e^{nl_1} m l_1}{2} \{ F_1''(z-2l) + F_2''(z) \} e^{-nl_1} = -a^2 \frac{n e^{-nl_1} \{ F_1'(z-2l) + F_2'(z) \}}{2} - e^{-nl_1} \{ F_1'(z-2l) + F_2'(z) \} \quad \text{----- (20)}$$

(20)式を整理して、右辺を  $Q_z'$  として、両辺を  $e^{nl_1} m l_1$  で除くと

$$F_2''(z) + \frac{e^{-nl_1}}{m l_1} F_2'(z) - \frac{n e^{-nl_1}}{m l_1} F_2(z) = Q_z' \quad \text{----- (21)}$$

$F_2(z)$  に就いての一般解は

$$F_2(z) = C e^{-\frac{(e^{-nl_1} - \sqrt{e^{-2nl_1} + 4nml_1})z}{2ml_1}} \quad \text{----- (22)}$$

(22)式の積分定数  $C$  は、 $f_2(z) \div F_2(z)$  とおいて、 $f_2(z)$  の値を  $C$  とおくと

$$C = \frac{ml_2 v}{a} e^{-\frac{(1 - \sqrt{1 + 4nml_1})l_1}{2n}} \quad \text{----- (23)}$$

但し  $e^{-nl_1} = 1'$  とおくと、

(23)式を(22)式に代入して、

$$F_2(Z) = \frac{m'l_2 v'}{a'} e^{-\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})(z-l)}{2m'l_1}} \quad \text{----- (24)}$$

(24)式を微分して

$$F_2'(Z) = -\frac{v'(1-\sqrt{1+4nm'l_2})}{2} e^{-\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})(z-l)}{2m'l_1}} \quad \text{----- (25)}$$

(5). 上昇波(円錐部, 本体)の決定

さて, 上昇波は, 地盤係数によって定まるから,  $e^{nx} AE \frac{\partial M_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = K \mu \Big|_{x=0}$  ----- (26)

但し  $K$ : 地盤係数

(26)式を  $AE$  で除く. 之に先端円錐角度を入れて,  $k = \frac{K}{AE}$  とおき,

$$K = n'l K_p \sin(\lambda+\theta) \cos \theta, \pi r^2 \cos \lambda, \text{cm}^{-1} \text{ とおくと}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = e^{-nx} k \mu \Big|_{x=0} \quad \text{----- (27)}$$

(24)式を(27)式に代入して,  $at+x=Z$ ,  $t \rightarrow z$ ,  $x=0$  ならば,  $at=Z$

$$n \{ F_1(Z) + F_2(Z) \} + \{ F_1'(Z) + F_2'(Z) \} = k \{ F_1(Z) + F_2(Z) \} \quad \text{----- (28)}$$

$$F_1'(Z) + F_1(Z)(k+n) = F_2'(Z) - F_2(Z)(k+n) \quad \text{----- (29)}$$

(29)式の右辺を  $P_2$  とおき,  $F_1(Z)$  に関する一般解を求めると,

$$F_1(Z) = e^{-(k+n)Z} \left\{ e^{(k+n)Z} P_2 dz + C \right\} \quad \text{----- (30)}$$

$$F_1(Z) = \frac{1}{k+n} P_2 + \frac{1}{(k+n)} P_2' + C e^{-(k+n)Z} \quad \text{----- (31)}$$

$P_2, P_2'$  は (24) (25) 式で求められ,

$$P_2 = -\left\{ \frac{v'}{2a'} (1-\sqrt{1+4nm'l_2}) + \frac{m'l_2 v'(k+n)}{a'} \right\} e^{-\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})(z-l)}{2m'l_1}} \quad \text{----- (32)}$$

$$P_2' = -\left\{ \frac{v'(1-\sqrt{1+4nm'l_2})}{4a'm'l_1} + \frac{v'(1-\sqrt{1+4nm'l_2})(k+n)}{2a'} \right\} e^{-\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})(z-l)}{2m'l_1}} \quad \text{----- (33)}$$

(32) (33)式を(31)式に代入して,  $m'l_2 k = d'$  とおくと,  $k = \frac{d'}{m'l_1}$  従って

$$F_1(Z) = \frac{m'l_2 v'}{a'} \left\{ -1 + \frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})}{4(d+m'l_1, m)^2} \right\} e^{-\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})(z-l)}{2m'l_1}} + C e^{-(k+n)Z} \quad \text{----- (34)}$$

(34)式の積分定数  $C$  を決定して

$$F_1(Z) = \frac{m'l_2 v'}{a'} \left\{ -1 + \frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})}{4(d+m'l_1, m)^2} \right\} \left\{ e^{-\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})(z-l)}{2m'l_1}} - e^{-(k+n)(z-l)} \right\} \quad \text{----- (35)}$$

(35)式を微分すると,

$$F_1'(Z) = \frac{v'}{a'} \left\{ -1 + \frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})}{4(d+m'l_1, m)^2} \right\} \left\{ -\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})}{2} e^{-\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})(z-l)}{2m'l_1}} + (d+m'l_1) e^{-(k+n)(z-l)} \right\} \quad \text{----- (36)}$$

よって, 求める歪及  $\sigma$  応力は

$$\frac{\partial M_2}{\partial x} = \left\{ f_2'(Z) + F_2'(Z) \right\} - \left\{ F_1'(Z) \right\}_{x=l_2} \quad \text{----- (37)}$$

(37)式に (24) (25) (36)式を代入すると (38)式を得る.

即ち,

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{v}{a} e^{-\frac{z-l}{ml}} - \frac{v'}{2a'} (1 - \sqrt{1+4nm'l_1}) e^{-\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_1})(z-l)}{2m'l_1}} - \frac{v'}{a'} \left\{ -1 + \frac{1-\sqrt{1+4nm'l_2}}{4(d'+m'l_3n)^2} \right\} \\ \left\{ -\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})}{2} e^{-\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})(z-l_2)}{2m'l_2}} + (d'+m'l_3) e^{-(k+n)(z-l)} \right\} \quad \text{----- (38)}$$

(38) 式に 時間の経過に於て 桁先端の歪は,  $t = \frac{l_3}{a}$  として

$$\left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x=0} = \theta_0 \\ t = \frac{l_3}{a}$$

次に (38) 式に  $t = \frac{2l_3}{a}$ ,  $z = at = 2l$  を代入すると

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{v}{a} e^{-\frac{l}{m}} - \frac{v'}{2a'} (1 - \sqrt{1+4nm'l_1}) e^{-\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_1})}{2m'l_1}} \\ - \frac{v'}{a'} \left\{ 1 + \frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})^2}{4(d'+m'l_3n)^2} \right\} \left\{ -\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})}{2} e^{-\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})}{2m'l_2}} + (d'+m'l_3) e^{-(k+m)l_3} \right\} \quad \text{----- (39)}$$

次に,  $t = \frac{3l_3}{a}$  として,  $z = at = 3l$  を代入すると

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{v}{a} e^{-\frac{2}{m}} - \frac{v'}{2a'} (1 - \sqrt{1+4nm'l_1}) e^{-\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_1})}{2m'l_1}} \\ - \frac{v'}{a'} \left\{ -1 + \frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})^2}{4(d'+m'l_3n)^2} \right\} \left\{ -\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})}{2} e^{-\frac{(1-\sqrt{1+4nm'l_2})}{2m'l_2}} + (d'+m'l_3) e^{-2l_3(k+m)} \right\} \quad \text{----- (40)}$$

同様にして 任意の時間  $t = \frac{4l_3}{a}$ ,  $t = \frac{5l_3}{a}$  ----- を代入すると

桁先端内維部の歪を求めらる。

参考文献: 小平吉男—物理数学 第1巻 P. 236.

土井江ノ—工業振動学 P. 273, p. 380~p. 388.

工業数学便覧 P. 350.

鈴内克洋—F1野荷重に於て鋼管桁の頭部変形の研究—港湾技術研究所

宇野幸—過渡現象 P. 166

西村恒太郎—振動工学