Ⅲ－1

# 2次元粒状体の構造について

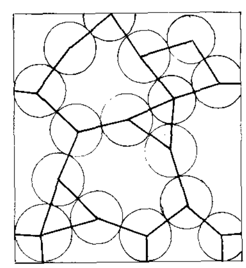
岐阜大学大学院　学生会員　福田光治

## (1)はじめに

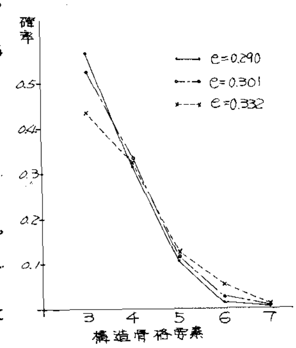
粒子接触角、粒子間伝達力、粒子間摩擦力による応力～歪関係の研究は成果をあげてきている。しかし、最上[1]が指摘した(1)ダイレイタンシー(2)変形の不連続性(3)間隙比分布(4)限界間隙比の現象を一般的に解析するには今だ種々の実験と考察が必要と考えられる。本研究では、粒状体のつめ方はランダムであるという仮定にたち、与えられた状態での均等径の2次元粒状体の構造を表現する方法を考察した。

## 2、構造骨格要素の分布

丸棒を使用した2次元粒状体モデルでは、「間隙」を構造と強く結びつけて考えることができる。Fig(1)に示したように、接触している円の中心と接点を直線で結んでいくとトラス構造が得られる。ところが逆にトラス構造は多角形でつくられる間隙の集合体ともみなせる。土構造を取り扱う場合、我々はまず与えられた土を対象にするのであり、その場合、間隙比が土の力学特性を分類するひとつの示標となっている。従って間隙比によって構造を考える必要性がある。そこで多角形を構造の特性を規定する要素と考え、構造骨格要素とする。そして3辺でできる多角形を3実骨格要素、4辺でできるものを4実骨格要素と呼ぶことにし、5辺以上の多角形もそれに順じる。一般に実験対象となっているものはランダムとされるつめ方である。本研究の場合ランダムは構造骨格要素の量とならび方に関係している。そして、構造を構造骨格要素の確率密度関数によってあらわすことにする。その場合、4実骨格要素以上の面積は固定したものではないが、ランダムの仮定によって、ある値のまわりに分布しているものとして扱った。従って構造骨格要素だけの確率分布関数でモデルの構造を近似的にあらわすことは可能であろう。Fig(2)にφ7mmのアルミ棒による実験結果を示した。これによると間隙比が大きくなると、3実骨格要素の確率が減少するといえる。すなわち間隙比の変化に構造骨格要素の分布が対応しうることを示している。



Fig(1) 2次元粒状体のトラス構造




Fig(2)間隙比と構造骨格要素の分布

## 3、構造骨格要素の分布形の理論式

全間隙数のうち$i$実骨格要素の出現する確率を$P_i$とし、Pを確率、添字$i$を骨格要素の種類、最大骨格要素の大きさを$r$とする。丸棒の本数をM、全間隙数をN、各骨格要素の間隙数を$n_i$とする。すると、本数Mは$n_i$によって

$$\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{r}(i-2)n_i = M \qquad \cdots\cdots (1)$$

(1)式の両辺をNで割って、$n_i/N = P_i$なる確率を代入すると、

$$\sum_{i=3}^{r}(i-2)P_i = 2M/N \qquad \cdots\cdots (2)$$

$i$実骨格要素の面積を$a_i$とすると、$a_i$は種々に分布している。しかし、ランダムの仮定のもとでは$\langle a_i\rangle$

を平均とすると、$i$ 点骨格要素の総面積は $\Sigma g_i = N P_i \langle g_i \rangle$ と考えてもよいであろう。すると全面積を $S$ とすると、

$$S = \sum_{i=3}^{r} N P_i \langle g_i \rangle \qquad \cdots\cdots (3)$$

(3)式をNについて解き(2)式に代入すると

$$\sum_{i=3}^{r} \left\{ P_i \left( i - 2 - \frac{2M}{S} \langle g_i \rangle \right) \right\} = 0 \qquad \cdots\cdots (4)$$

(4)式は丸棒の本数とそれによってつくられる粒状体モデルの面積が既知の場合、$P_i$ の満足すべき条件である。

ところで、ある条件のもとで分布形を求める場合、一般にエントロピー最大の原理が利用される。エントロピーを $s$ とすると

$$s = -K \sum_{i=3}^{r} P_i \ln P_i \qquad \cdots\cdots (5)$$

$P_i$ は確率であるから

$$\sum_{i=3}^{r} P_i = 1 \qquad \cdots\cdots (6)$$

従って、$s$ を条件(4)式、(6)式のもとで最大にする問題、すなわち Lagrange の未定乗数法の問題に帰着する。

(4)(5)(6)式を微分し、(5)式の結果を0とおくと

$$\sum_{i=3}^{r} \left\{ i - 2 - \frac{2M}{S} \langle g_i \rangle \right\} dP_i = 0 \qquad \cdots\cdots (7)$$

$$ds = -K \sum_{i=3}^{r} ( \ln P_i + 1 ) dP_i = 0 \quad \cdots (8) \qquad \sum_{i=3}^{r} dP_i = 0 \quad \cdots\cdots (9)$$

(9)式に定数 $(\alpha - 1)$、(7)式に定数 $\beta$ を乗じて(8)式に加え、整理すると、

$$\sum_{i=3}^{r} \left\{ \ln P_i + \alpha + \beta \left( i - 2 - \frac{2M}{S} \langle g_i \rangle \right) \right\} dP_i = 0 \qquad \cdots\cdots (10)$$

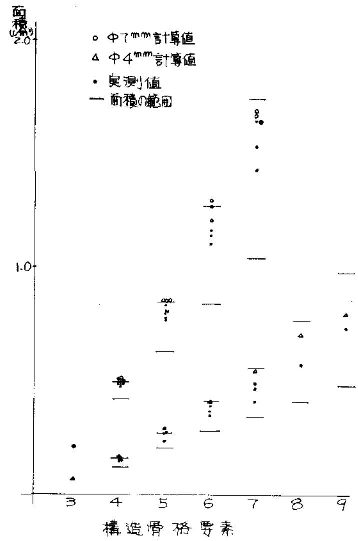
$dP_i$ はそれぞれ独立に変化するから

$$\ln P_i + \alpha + \beta \left( i - 2 - \frac{2M}{S} \langle g_i \rangle \right) = 0$$

従って

$$P_i = \exp \left\{ -\alpha - \beta \left( i - 2 - \frac{2M}{S} \langle g_i \rangle \right) \right\} \qquad \cdots\cdots (11)$$

間隙比 $e$、丸棒の直径を $R$ とすると、$2M / S = 8 ( 1 - e ) / \pi R^2$ の関係がある。それ故(11)式は与えられた間隙比のもとでの骨格要素の確率密度関数を与える式である。




Fig(3) 構造骨格要素の面積

4. 実験と結果

(11)式の検証には実測の難易を考慮し、$P_i$ から $\langle g_i \rangle$ が一定の値を導きだせるか、実測した $g_i$ との関連によっておこなった。実験は φ7 mm, φ4 mm のアルミ棒を使用し、適当な本数を手でつかみ、つんでいった。測定は写真によっておこなった。結果を Fig(3) に示す。図上の — は力学条件を無視して計算した各骨格要素の面積の最大、最小をあらわしている。3点骨格要素の面積は当然一義的に決まる。4点、5点骨格要素は最大の面積に近く、要素の数が大となるにしたがって中間付近に分布する傾向がある。図には $P_i$ より逆算して求めた $\langle g_i \rangle$ も示してある。これによると4、5、6点骨格要素については上限付近にプロットされている。$\langle g_i \rangle$ についてはほぼ一定の値が導きだせた。また径の違いによる特性も(11)式はあらわしている。

5. あとがき

ランダムなつみ方と $g_i$ をもう少し熟考する必要があるが、(11)式はある程度2次元粒状体の構造をあらわしていることがわかった。


参考文献　最上武雄：粒状体の力学，土と基礎 VOL 15. NO 1. 1967