II − 5

円管路におけるbed形態について

信州大学工学部　正員　富所五郎

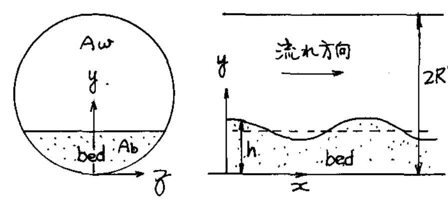
1) まえがき

前報[1]の実験研究で，円管内に一定量の粒子が存在する場合のbed形態は，開水路のripple・duneに相当するwave bed，およびflat bedで，antiduneに相当する形態は存在しないことを述べた。

そこで本研究は，waveの発生要因として流速分布の非対称性と粒子移動の非平衡性をとり上げ，開水路のbed形態を論じた椿・斉藤の方法[2]を円管路に適用し，そのbed形態について論ずる。

2) 基礎方程式

座標を図−1のようにとる。ここでは，管内に十分粒子があり，管底は露出しないし，またbed面はz軸方向に水平と仮定する。この仮定は，flat bedに近いbed形態では十分妥当であることが実験で確認されている。椿・斉藤の導いた流れの基礎方程式を円管路について上げると，(1)，(2)，(3)，(4)式となる。



図−1

$$\frac{\partial A_\omega}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(U_m\cdot A_\omega)=0 \quad \cdots(1),$$

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial U_m}{\partial t}+\frac{U_m}{g}\cdot\frac{\partial U_m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega}{\rho}+\frac{P}{\rho g}\right)+\frac{\tau_b\cdot L_b+\tau_\omega\cdot L_\omega}{\rho g A_\omega}=0 \quad \cdots(2),$$

$$\frac{\partial A_b}{\partial t}+\frac{1}{1-\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(q_T\cdot L_b)=0 \quad \cdots(3),$$

$$\frac{\lambda_1 d}{A_*}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\mathbb{P}-\frac{\Phi}{A_*}(1-\mathbb{P}) \quad \cdots(4),$$

$$\mathbb{P}=\frac{\frac{25}{A_*}\left(\frac{k_s}{d}\right)^{-0.44}\Psi^{1.3}(\Psi-\Psi_c)}{1+\frac{25}{A_*}\left(\frac{k_s}{d}\right)^{-0.44}\Psi^{1.3}(\Psi-\Psi_c)} \quad \cdots(5),$$

$$\Psi=\frac{u_*^2}{sgd}=\frac{\tau_b}{\rho sgd} \quad \cdots(6),$$

$\Phi=q_T/\sqrt{sgd^3}$，A_ω, A_b；流体部分，およびbedの断面積，U_m；平均流速，L_ω, L_b；管壁,bed面長，τ_ω, τ_b；管壁面,bed面せん断応力，q_T；流砂量，s；粒子水中比重，u_*；摩擦速度，d；粒径，k_s；相当粗度($\fallingdotseq 4d$)，A_*；定数($\fallingdotseq 1/10$)，λ_1；定数($\fallingdotseq 100$)，他の符号は慣用に従う。

ここでτ_ωは管壁面で，またτ_b, q_Tはbed面で一定とした。

3) τ_bの決定

$\tau=(\tau_b\cdot L_b+\tau_\omega\cdot L_\omega)/L$，$L=L_\omega+L_b$，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Omega}{\rho}+\frac{P}{\rho g}\right)=-I$ とすると，(2)式は，

$$\tau=\rho g R\left(I-\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial U_m}{\partial t}-\frac{U_m}{g}\cdot\frac{\partial U_m}{\partial x}\right)=\rho g R I' \quad \cdots(7),$$

$R = A_w/L$；径深，$I' = I - \frac{1}{g}\frac{\partial U_m}{\partial t} - \frac{U_m}{g}\frac{\partial U_m}{\partial x}$　となる。

ここで非定常流においてもEinsteinの法則が適用出来ると仮定する。　すなわち

$$U_m = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} I'^{\frac{1}{2}},\quad U_m = \frac{1}{n_w} R_w^{\frac{2}{3}} I'^{\frac{1}{2}},\quad U_m = \frac{1}{n_b} R_b^{\frac{2}{3}} I'^{\frac{1}{2}} \quad \cdots (8),$$

$$\tau = \rho g R I',\ \tau_w = \rho g R_w I',\ \tau_b = \rho g R_b I' \quad \cdots (9),$$

n_w, n_b；管壁，bed面のManning粗度係数，R_w, R_b；管壁，bed面の径深。

管壁面を水理学的に滑らかとして，n_w を Blasiusの式 $f = 0.3164/Re^{\frac{1}{4}}$ と $n_w = (f \cdot R_w^{\frac{1}{3}}/8g)^{\frac{1}{2}}$ より求め，この値を(8)式の第2式に代入してR_wを求めると

$$R_w = 0.00002854^{0.8}\nu^{0.2}U_m^{1.4}/I'^{0.8} \quad \cdots (10)$$

となる。　またR_bは，$R_b = (A_w - R_w \cdot L_w)/L_b$ より求められ，これを用いτ_bが決定される。

つぎに，椿・斉藤は流速分布の非対称性を考慮してτ_bを次のように表わした。

$$\tau_b = \rho U_m^2 \frac{1}{\left(1 + 2.5\ \ln\frac{R_b}{k_s}\right)^2} \cdot \left\{\frac{1-\Delta}{1-\Delta/3}\right\}^2 \quad \cdots (11),$$

$$\Delta = \frac{7.5}{8.5 + 2.5\ \ln\frac{R_b}{k_s}} + 6.0\frac{\partial R_b}{\partial x}\ 。$$

ここで，流れは3次元的であるが簡単のため水深R_bである2次元流れとした。　(9)，(12)式より

$$g R_b' I' = U_m^2 \frac{1}{\left(1 + 2.5\ln\frac{R_b}{k_s}\right)^2} \cdot \left\{\frac{1-\Delta}{1-\Delta/3}\right\}^2 \quad \cdots (12)$$

が得られる。　これは，(2)式に代る基礎方程式の1つになる。

4) bedの安定方程式

上にでてきた諸量を平均値と，その偏差にわけて

$h = h_0(1+\eta)$，$A_w = A_{w0}(1+a_w)$，$A_b = A_{b0}(1+a_b)$，$L_w = L_{w0}(1+l_w)$，$L_b = L_{b0}(1+l_b)$，
$R_w = R_{w0}(1+r_w)$，$R_b = R_{b0}(1+r_b)$，$I' = I_0'(1+i_f')$，$\Psi = \Psi_0(1+\psi)$，$\Phi = \Phi_0(1+\varphi)$，
$U_m = U_{m0}(1+u)$，$P = P_0(1+p')$

とおき，η，a_w などは，1にくらべ小さいとして，その2乗以上の項を無視する。　また$\xi = x/R_{b0}$とする。　A_w, A_b, L_w, L_bをhで表わす。　それぞれの偏差は，$R' \geqq h$と仮定し

$$a_w = -\frac{L_{b0}\cdot h_0}{A_{w0}}\eta,\quad a_b = \frac{L_{b0}\cdot h_0}{A_{b0}}\eta,\quad l_w = -\frac{4R'h_0}{L_{w0}\cdot L_{b0}}\eta,\quad l_b = \frac{4(R'-h_0)h_0}{L_{b0}^2}\eta \quad \cdots (13)$$

R'；管半径

となる。　またr_w, r_bは(10)式，および $R_b = (A_w - R_w \cdot L_w)/L_b$ を用い次のようになる。

$$r_w = 1.4u - 0.8 i_f',\quad r_b = \frac{1}{L_{b0}\cdot R_{b0}}\left\{A_{w0}(a_w - l_w) - R_{w0}\cdot L_{w0}(r_w + l_w - l_b)\right\} \quad \cdots (14)$$

つぎに，(1)，(3)，(4)，(12)の基本式について考える。　まず(1)，(3)式は

$$-\frac{h_0\chi}{R_{b0}}\frac{\partial \eta}{\partial \tau'} + \frac{A_{w0}}{R_{b0}\cdot L_{b0}}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{h_0}{R_{b0}}\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0 \quad \cdots (15),$$

$$\frac{h_0}{R_{b0}}\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{4(R'-h_0)h_0}{L_{b0}^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 0 \quad \cdots (16),$$

$\tau' = t\sqrt{sgd^3}\Phi_0/(1-\lambda)R_{b0}^2,\ \chi = q_{T0}/(1-\lambda)u_{m0}R_{b0}$ 。

(5)式，および(6)，(11)式より p'，ψ は次のようである。

$$p' = \frac{2.3\Psi_0 - 1.3\Psi_c}{\left\{1+\frac{25}{A*}\left(\frac{R_{b0}}{k_s}\right)^{-0.44}\Psi_0^{1.3}(\Psi_0-\Psi_c)\right\}(\Psi_0-\Psi_c)}\psi = B'\psi \quad \cdots(17),$$

$$\psi = 2u - \frac{5.0}{6.0+2.5\ln\frac{R_{b0}}{k_s}} - \frac{8.0\left(8.5+2.5\ln\frac{R_{b0}}{k_s}\right)}{\left(1.0+2.5\ln\frac{R_{b0}}{k_s}\right)\left(6.0+2.5\ln\frac{R_{b0}}{k_s}\right)}\cdot\frac{\partial r_b}{\partial\xi} = 2u - pr_b - q\frac{\partial r_b}{\partial\xi} \cdots(18).$$

(18)，(19)式を用いると，(4)式は次のようになる。

$$E\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \varphi = B\left(2u - pr_b - q\frac{\partial r_b}{\partial\xi}\right) \quad \cdots(19);$$

$$E = \frac{\lambda_1 d}{R_{b0}}\cdot\left(1+\frac{\Phi_0}{A*}\right), \quad B = B'\cdot\left(1+\frac{\Phi_0}{A*}\right) \quad \cdots(20).$$

つぎに，(12)式は $r_b + i_f' = 2u - p\cdot r_b - q\frac{\partial r_b}{\partial\xi}$ となる。 この式の i_f' は，(14)の2式を用い

$$i_f' = 1.75u + 1.25\frac{R_{b0}\cdot L_{b0}}{R_{w0}\cdot L_{w0}}r_b - 1.25\frac{A_{w0}}{R_{w0}\cdot L_{w0}}(a_w - l_b) + 1.25(l_w - l_b)$$

となり，これを上の式に代入し，(13)式を用いると次の式が得られる。

$$p\cdot r_b + r_b + 1.25\frac{R_{b0}\cdot L_{b0}}{R_{w0}L_{w0}}r_b + q\frac{\partial r_b}{\partial\xi} = 0.25u - A'\eta \quad \cdots(21);$$

$$A' = \frac{1.25h_0}{R_{w0}\cdot L_{w0}\cdot L_{b0}}\left\{4(R'-h_0)R_{b0} - 4R'R_{w0} + L_{b0}^2\right\}.$$

bed の安定性を調べるために

$$\eta = \eta_* e^{\delta\tau' + i\beta\xi},\ r_b = r_{b*}e^{\delta\tau'+i\beta\xi},\ u = u_* e^{\delta\tau'+i\beta\xi},\ \varphi = \varphi_* e^{\delta\tau'+i\beta\xi} \quad \cdots(22)$$

とおくと，(15)，(16)，(19)，(21)の基礎式は次のようになる。

$$\frac{h_0\chi}{R_{b0}}\delta\eta_* + \frac{A_{w0}}{R_{b0}\cdot L_{b0}}i\beta u_* - \frac{h_0}{R_{b0}}i\beta\eta_* = 0 \quad \cdots(23),$$

$$\frac{h_0}{R_{b0}}\delta\eta_* - i\beta\varphi_* + \frac{4(R'-h_0)h_0}{L_{b0}^2}i\beta\eta_* = 0 \quad \cdots(24),$$

$$(E\cdot i\beta + 1)\varphi_* = B(u_* - pr_{b*} - qi\beta r_{b*}) \quad \cdots(25),$$

$$\left(p + 1 + 1.25\frac{R_{b0}\cdot L_{b0}}{R_{w0}\cdot L_{w0}} + i\beta q\right)r_{b*} = 0.25u_* - A'\eta_* \quad \cdots(26).$$

上の4つの式で，χ の項は小さいとして無視し，η_*，r_{b*}，u_*，r_{b*} を消去し，δ についてとく。 いま $\delta = \delta_1 + i\delta_2$ と置くと，δ_1，δ_2 はつぎのようである。

$$\delta_1 = \frac{B\beta R_{b0}}{h_0(1+E^2\beta^2)}\cdot\left[\frac{\left(1+1.25\frac{R_{b0}\cdot L_{b0}}{R_{w0}\cdot L_{w0}}\right)\cdot(q/E - p) - p^2 - \beta^2q^2}{\left(p+1+1.25\frac{R_{b0}L_{b0}}{R_{w0}L_{w0}}\right)^2 + \beta^2q^2}\cdot\left(A' - \frac{0.25h_0L_{b0}}{A_{w0}}\right) - \frac{2h_0L_{b0}}{A_{w0}}\right] \quad \cdots(27),$$

$$\delta_2 = -\frac{B\beta R_{b0}}{h_0(1+E^2\beta^2)}\left[\frac{1+E^2\beta^2}{B}\cdot\frac{4(R'-h_0)h_0}{L_{b0}^2} + \frac{\left(1+1.25\frac{R_{b0}L_{b0}}{R_{w0}L_{w0}}\right)(E\beta q+p) + p^2 + \beta^2q^2}{\left(p+1+1.25\frac{R_{b0}L_{b0}}{R_{w0}\cdot L_{w0}}\right) + \beta^2q^2}\cdot\left(A' - \frac{0.25h_0L_{b0}}{A_{w0}}\right) + \frac{2h_0L_{b0}}{A_{w0}}\right] \quad \cdots(28).$$

ここで δ_2 の正負について考える。 δ_2 が負である条件は，$A' - \frac{0.25h_0L_{b0}}{A_{w0}} > 0$ となることである。

$$A' - \frac{0.25\, h_0 \cdot L_{b0}}{A_{w0}} = 0.25\left[\frac{20(R'-h_0)R_{b0} - 20R'R_{w0} + 4L_{b0}^2}{R_{w0}\cdot L_{w0}\cdot L_{b0}} + \frac{L_{b0}}{A_{w0}}\left(\frac{A_{w0}}{R_{w0}\cdot L_{w0}} - 1\right)\right] >$$

$$0.25h_0\left[\frac{20\,(R'-h_0)R_{w0} - 20R'R_{w0} + 4L_{b0}^2}{R_{w0}\cdot L_{w0}\cdot L_{b0}} + \frac{R_{b0}\cdot L_{b0}^2}{A_{w0}\cdot R_{w0}\cdot L_{w0}}\right] > 0.25h_0\frac{-20R_{w0}h_0 + 4L_{b0}^2}{R_{w0}L_{w0}\cdot L_{b0}}$$

$$= 0.25h_0\cdot\frac{16\,(2R'h_0 - h_0^2) - 20R_{w0}\cdot h_0}{R_{w0}\cdot L_{w0}\cdot L_{b0}} > 0.25h_0\,\frac{64R_{w0}h_0 - 16h_0^2 - 20R_{w0}\cdot h_0}{R_{w0}\cdot L_{w0}\cdot L_{b0}} > 0$$

∵ $R' \geqq 2R_{w0}$, $R' > h_0$。

ゆえに $\gamma_2 < 0$。したがってwaveの進行方向は常に流れ方向となり，開水路で上流に進むantiduneに相当するbed形態は，円管路では存在しないことが証明された。

つぎに，waveは $\gamma_1 > 0$ の時発達し，$\gamma_1 < 0$ の時減衰する。したがってbedがflatであるために，流れは(12)，(27)式より

$$U_{m0}^2 = g R_{b0} I_0 \left(6.0 + 2.5 \ln\frac{R_{b0}}{k_s}\right)^2 \quad \cdots (29)$$

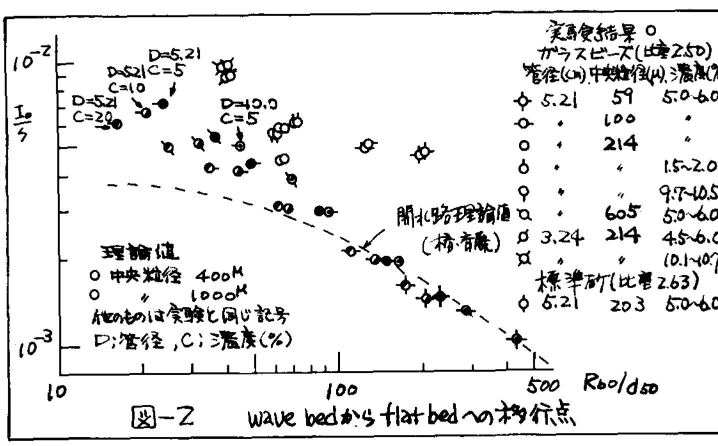
$$\frac{\left(1 + 1.25\frac{R_{b0}\cdot L_{b0}}{R_{w0}\cdot L_{w0}}\right)\left(\frac{q}{\varepsilon} - P\right) - P^2}{\left(P + 1 + 1.25\frac{R_{b0}\cdot L_{b0}}{R_{w0}\cdot L_{w0}}\right)^2}\cdot\left(A' - \frac{0.25h_0\cdot L_{b0}}{A_{w0}}\right) - \frac{2h_0\cdot L_{b0}}{A_{w0}} < 0$$

を同時に満足することである。ここで(27)式の β は，$\beta = 2\pi R_{b0}/\lambda'$ (λ': wave波長) で $\lambda' \gg R_{b0}$ より $\beta \doteqdot 0$ とした。

5) 理論値と実験結果の比較，および結語

(29)，(30)式を用い数値計算すると，(29)式を満足する I_0, U_{m0} に対し(30)式は単調減少する。したがってwave bedからflat bedに移行しても，その逆の移行はありえない。管内に一定量の粒子が存在する場合，流速を増していくと次のようにbed面が変化する。まず粒子が動き始め，waveができ，しだいに発達する。その後減衰しflat bedに移行する。つぎにbed面はflatのまましだいにけずり取られ，bedは消滅する。しかし場合によっては，bed面に作用するせん断力がbedと管底との摩擦力を越え，wave bedの状態からbed全体が動き始め，bedが消滅し，flat bedが存在しないこともある。

図−2にwave bedからflat bedになる限界点の理論値，および前報の実験結果を示す。理論値は1つの線にのらず，管内径，粒子断面内体積濃度により変化する。理論値と実験結果の差が大きいが実験は管径，粒径とも限られていて数も少ない。この理論の評価には，もっと多くの実験結果をうることが必要である。



図−2　wave bedからflat bedへの移行点

6) 参考文献

1) 岩佐富州，葛山．"掃流粒子を有する管路流れに関する研究" 昭和47年・年講

2) 椿・斉藤．"流れによるsand waveの発生限界" 九大工学集報，40巻5号(42年12月)