混相乱流に関する二,三の考察

信州大工学部 (正) 余越正一郎
〃 (正) 富所五郎
信州大大学院 (学)○松井 清

1) まえがき

河川の流れ, パイプの土砂輸送など, 水理学における実用問題に, 固液混相流に関する水理学的性質の知識を必要とすることが多い。 固液混相流はその構成要素である固体, 液体の幾何学的, 運動学的, 力学的性質により種々の形態に分類される。 固体と液体がほぼ均一に混り合って, 浮遊状態で流れる場合の取り扱い方法として次のものが考えられる。

a) 液体中を相対的に動く固体粒子の運動として取り扱う。

b) 液体と固体とは連続体モデルによって表わされ, 互に干渉運動を行うという取り扱い。

c) 固液混相流を単一相流体とみなして取り扱う。

いずれの取り扱い方法が良いかは, 固体粒子の性質, 流れの水理条件などにより異なる。 a.) の方法には, Tchenなどの研究がある。 Tchenは, 流れ中を運動する単一粒子の方程式, いわゆる Basset-Boussinesq-Oseenの積分微分方程式をいくつかの仮定のもとに解き, 粒子の拡散係数, 乱れエネルギーなどを, 液体のそれに結びつけている。 彼の用いた仮定で一番問題なのは, 粒子は運動中同一の流体近傍にとどまっているという仮定で, これはいわゆるCrossing-Trajectory効果を無視している。

一方, Lumleyは粒子がその運動中に出合う乱子の速度を, 粒子が最初に出合った乱子の速度に結びつけることを提案している。 そこで本研究は, 同一の粒子の運動方程式より出発したTchen, Lumleyの両方法でこれを解き, 粒子の乱れエネルギーを求め, 両者の差からCrossing-Trajectory 効果をみようとするものである。

2) 粒子の乱れエネルギー

(A) Lumley の方法

ここでは, 粒子はその抵抗則がStokes' Lawに従うような粒径, 比重であると仮定し, また, 体積濃度は十分小さいとして, 粒子の相互作用は無視する。 さらに, 乱れ場は等方性であると仮定する。 このとき粒子の運動方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}y(\alpha,t)+F\,y(\alpha,t)=F\cdot U(y,t) \qquad (1)$$

で表わされる。 ここに α, $y(\alpha,t)$は粒子の $t=0$, $t=t$ における位置, $U(y,t)$ は粒子が $t=t_1$において出合う流体の速度, tは時間, $F=6\pi a\mu/m_p$. $m_p=\frac{4}{3}\pi a^3\rho_s$, aは粒子半径, μは粘性係数, ρ_sは粒子の密度である。

ここで$U(y,t)$は, y, t のランダム函数で, このままでは積分できない。 Lumleyは$U(y,t)$を, 粒子が最初に出合った流体のt時間後の速度$V(\alpha,t)$を用い, $U(y,t)=V(\alpha,t)\,R_E(y,x)$ で表わした。 ここでxは, 粒子が最初に出合った流体のt時間後の位置である。 いま $\alpha=0$とし, 上の式を式(1)に代入して, 積分を行うと,

$$\frac{dy(t)}{dt}=V_p(t)=F\int_0^t e^{-(F-\tau)}\cdot V(\tau)\,R_E(y(\tau),x(\tau))\,d\tau \qquad (2)$$

$$y(t)=\int_0^t \{1-e^{-\overline{F}(t-\tau)}\}\,\overline{V}(\tau)\,R_E(y(\tau),x(\tau))\,d\tau \qquad (3)$$

が得られる。 ここで $y(0,t)$, $\overline{V}(0,\tau)$ などは $y(t)$, $\overline{V}(\tau)$ などとし，また $\dot{y}(0)=0$ として式(2)の積分定数を求めた。

$$R_E(y(t),x(t)) = 1-\frac{[y(t)-x(t)]^2}{\lambda_E^2}+\cdots\cdots \qquad (4)$$

を式(2)に代入する。 ここに λ_E はオイラーのミクロスケールである。 $(1/\lambda_E)^4$ 以上の項は小さいとして無視できるならば

$$\overline{V}_p(t)=\overline{F}\int_0^t e^{(\overline{F}-\tau)}\,\overline{V}(\tau)\,d\tau = \frac{\overline{F}}{\lambda_E^2}\int_0^t e^{-(\overline{F}-\tau)}\,\overline{V}(\tau)\,(y(\tau)-x(\tau))^2\,d\tau \qquad (5)$$

である。 式(4)を式(3)に代入して，$y(t)-x(t)$ を求め，これを式(5)に代入して乗すると

$$\overline{V}_p(t)^2=\overline{F}^2\int_0^t\int_0^t e^{-\overline{F}(t-\tau)-\overline{F}(t-q)}\,\overline{V}(\tau)\overline{V}(q)\,d\tau\,dq-\frac{2\overline{F}}{\lambda_E^2}\int_0^t\int_0^t e^{-\overline{F}(t-\tau)-\overline{F}(t-q)}\,\overline{V}(\tau)\overline{V}(q)\,d\tau\,dq$$
$$\times\int_0^q\int_0^q e^{-\overline{F}(q-m)-\overline{F}(q-n)}\,\overline{V}(m)\overline{V}(n)\,dm\,dn \qquad (6)$$

ここで $R(\tau)=e^{-\tau/\lambda_*}$ とする。 $R(\tau)$ はラグランジュ相関係数，λ_* はラグランジュの寿命時間。 この相関係数を用い，定常状態を考えるので $t\to\infty$ とし，式(6)の期待値を求めると

$$\underset{t\to\infty}{E}(\overline{V}_p)=\langle \overline{V}_p^2\rangle=\langle \overline{V}^2\rangle\frac{\overline{F}}{\overline{F}+1/\lambda_*}-\frac{\langle \overline{V}^2\rangle^2}{\lambda_E^2}\frac{2(2\overline{F}+1/\lambda_*)}{(\overline{F}+1/\lambda_*)^3} \qquad (7)$$

これが粒子の乱れエネルギーを表わす式である。

(b) Tchenの方法[*1]

粒子は，その運動中同一の流体近くを運動するというTchenの仮定を用いると，式(1)の$\overline{U}$はtのみの函数となり，式(1)は直ちに積分できる。 $\overline{V}_p(t)$, $\overline{U}(t)$のフーリエ変換を行うと式(1)より

$$\hat{\overline{V}}_p(t)=\{\overline{F}/(\overline{F}-i\omega)\}\,\hat{\overline{U}}(t) \qquad (8)$$

が得られる。 ここで，$\overline{V}_p$, $\overline{U}$ のエネルギースペクトル函数 $f_p(\omega)$, $f(\omega)$ を

$$\langle \overline{V}_p^2\rangle f_p(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{\hat{\overline{V}}_p(t)\hat{\overline{V}}_{p*}(t)}{2\pi T} \qquad \langle \overline{U}^2\rangle f(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{\hat{\overline{U}}(t)\hat{\overline{U}}_*(t)}{2\pi T} \qquad (9)$$

で定義する。 ここで，サブスクリプト*は共役複素数を意味する。 式(9)を用いると，

$$\langle \overline{V}_p^2\rangle=\int_0^\infty\frac{\hat{\overline{V}}_p(t)\hat{\overline{V}}_{p*}(t)}{2\pi T}\,d\omega=\langle \overline{U}^2\rangle\int_0^\infty\frac{\overline{F}^2}{\overline{F}^2+\omega^2}\cdot f(\omega)\,d\omega \qquad (10)$$

となる。 ここで $R(\tau)=e^{-\tau/\lambda_*}$ に対応するスペクトル函数 $f(\omega)=\frac{2}{\pi}\frac{\lambda_*}{1+\omega^2\lambda_*^2}$ を用いると

$$\langle \overline{V}_p^2\rangle=\langle \overline{U}^2\rangle\frac{\overline{F}}{\overline{F}+1/\lambda_*}=\langle \overline{V}^2\rangle\frac{\overline{F}}{\overline{F}+1/\lambda_*} \qquad (11)$$

となる。 式(11)は，式(1)で $\overline{U}(t)=R(y,t)\overline{V}(t)=\overline{V}(t)$ とおき，a)と同じ方法で求まる。

3) 結果

Crossing-Trajectory 効果は，式(7),式(11)より $\frac{\langle \overline{V}^2\rangle^2}{\lambda_E^2}\frac{2(2\overline{F}+1/\lambda_*)}{(\overline{F}+1/\lambda_*)^3}$ で表わされる。

*1) Soo "Fluid Daynamics of Multiphase Systems" 1967, Gim Blaisdell