OPEN-SHELLの力学解析

名古屋工業大学大学院　学生員　西川芳久

まえがき　本論文は，連続型のClosed-Shellを解析する前段階として，図−２（$\varphi=0, \varphi=\pi-\theta$ においてSimply Supported），および図−３（$\xi=0, \xi=\ell/a$ においてSimply Supported）の様な構造物を解析したものである。外荷重としては，構造物の内側から，水圧がかかっているものとする。今，外内荷重X，Y，Z，それに対応する変位u，v，wの方向を図−１の様におく。

X＝Y＝Z＝０の場合（一般解），応力函数F（ξ,φ）を用いると，Shellの一般理論[1]による微分方程式は次の(1)式の様になる。

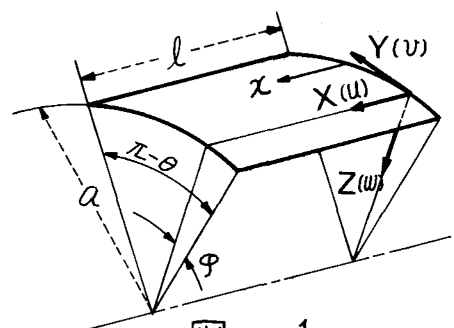
$$\Delta\Delta\Delta\Delta F + \frac{1-\nu^2}{C^2}\frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} = 0 \text{ ---------(1)}$$

ただし，$C^2=\frac{h^2}{12a^2}$，$\xi=\frac{x}{a}$，$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

解としては，X，Y，Zがある場合の特解と一般解の和として表わす。

解　法　今の場合，外荷重は水圧のみであるから，X＝Y＝０，$Z=-\gamma a\xi$（γ；水の単位体積重量）。図−２の場合には，Zを次の様なフーリエ級数に展開する。

$$Z=-\gamma a\xi=-\gamma a\xi\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{4}{m\pi}\sin m\frac{\varphi}{\pi-\theta}\pi$$



図−1

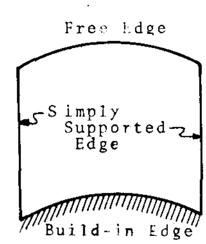
そうすると特解u_0，v_0，w_0は次の様になる。

$$\begin{cases} u_0=\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}-\gamma\frac{(1-\nu^2)a^3}{C^2Eh}\frac{4}{m\pi}\left(\frac{\pi-\theta}{m\pi}\right)^6\sin m\frac{\varphi}{\pi-\theta}\pi \\ v_0=\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}\gamma\frac{(1-\nu^2)a^3}{C^2Eh}\frac{4}{m\pi}\left(\frac{\pi-\theta}{m\pi}\right)^5\xi\cos m\frac{\varphi}{\pi-\theta}\pi \\ w_0=\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}-\gamma\frac{(1-\nu^2)a^3}{C^2Eh}\frac{4}{m\pi}\left(\frac{\pi-\theta}{m\pi}\right)^4\xi\sin m\frac{\varphi}{\pi-\theta}\pi \end{cases}$$

一般解としては，$F_m=\sum_{m=1}^{\infty}e^{\alpha\xi}\sin m\frac{\varphi}{\pi-\theta}\pi$とおいて，これを(1)式に代入して求める。解をこの様な形におくと$\varphi=0$，$\varphi=\pi-\theta$ において単純支持であるという境界条件（$u=w=0$，$M_\varphi=N_\varphi=0$）が暗黙の内に満足されるので，一般解の中に含まれる８つの未定定数を求めるのに，$\xi=0$においてFree（$N_x=0$, $M_x=0$, $S_x=0$, $T_x=0$），$\xi=\ell/a$ においてBuilt-in（$u=v=w=0, \frac{\partial w}{\partial\xi}=0$）の８つの境界条件を用いる。

図−３の場合には，Zを次の様にフーリエ展開する。

$$Z=-\gamma a\xi=-\gamma a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\lambda_n}(-1)^{n-1}\sin\lambda_n\xi \qquad \left(\lambda_n=\frac{n\pi a}{\ell}\right)$$



図−2

そうすると特解u_0，v_0，w_0は次の様になる。

$$\begin{cases} u_0=\sum_{n=1}^{\infty}2\gamma\frac{\nu}{\lambda_n^2}\frac{(1-\nu^2)a^3}{Eh}(-1)^{n-1}\frac{1}{(1-\nu^2+C^2\lambda_n^4)}\cos\lambda_n\xi \\ v_0=0 \end{cases}$$

$$w_0=\sum_{n=1}^{\infty}-2r\frac{(1-\nu^2)a^3}{Eh}\frac{(-1)^{n-1}}{\lambda_n}\frac{1}{(1-\nu^2+c^2\lambda_n^4)}\sin\lambda_n\xi$$

一般解としては，$F_n=\sum_{n=1}^{\infty}e^{r\varphi}\sin\lambda_n\xi$ とおいて求める。解をこの様な形におくと $\xi=0$，$\xi=l/a$ において単純支持の境界条件（$v=w=0$，$M_x=N_x=0$）が暗黙の内に満足される。他の８つの境界条件は，$\varphi=0$，$\varphi=\pi-\theta$ においてBuilt-inの境界条件（$u=v=w=0$，$\frac{\partial w}{\partial\varphi}=0$）である。

ここで，すべての変位，および応力は特解と一般解Fの関数となっている。[(1)]

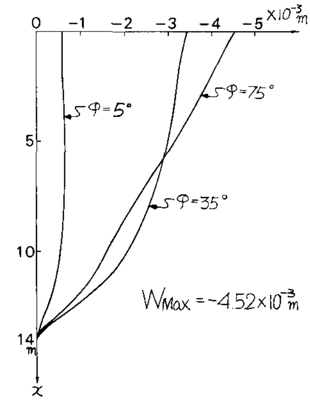
計算例　計算結果をGraph 1～5に示しておいた。用いた値は，$l=14^m$，$a=5^m$，$h=0.4^m$，$\nu=0.25$，$E=2.5\times10^6\,t/m^2$，$\theta=30°$。

No1は図－2の構造物，No2は図－3の構造物の解析結果を示した。

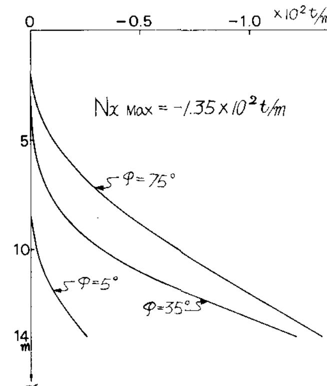
両方の場合共，M_x は底部付近で最大の値を示している。又，図－2の構造物の場合，Wが$\varphi=0°$～$15°$の間で，$\varphi=const$の線上の最大変位を示すのは，$x=5^m$～6^mの間であった。それは底部のBuilt-inの影響を受けてそうなったものと考えられる。出て来た結果は，境界条件等でチェックしておいた。

参考文献 (1) Theory of Plates and Shells.
By S.P. Timoshenko and S.W. Krieger

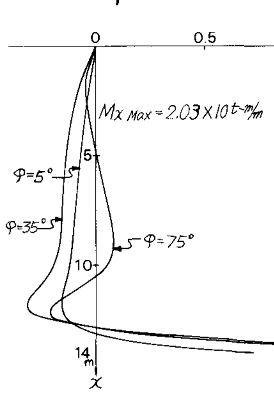
Graph-1 W(No1)

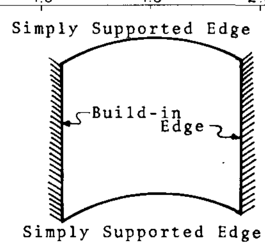


Graph-2 Nx(No1)



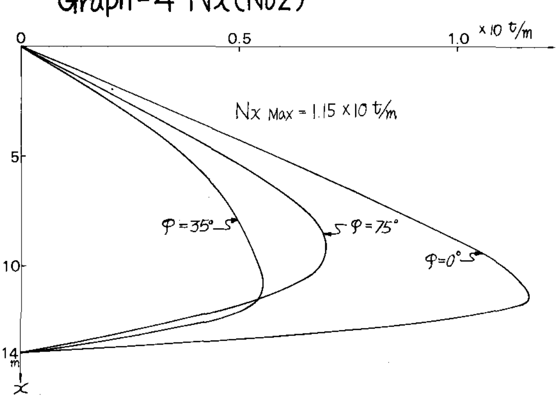
Graph-3 Mx(No1)





図－3

Graph-4 Nx(No2)



Graph-5 Mx(No2)