有限要素法による幅広いアーチ橋の解析

名古屋大学　学生員　○雉真哲郎
名古屋大学　正　員　成岡昌夫

1．緒言

本論文では，シェル内の相対変位が小さく，面内変形と曲げ変形の連成がない円筒シェルをアーチ部に持つ幅広いアーチ橋の有限要素法による3次元的な解析を示す。さらに，アーチ橋の場合，たわみの影響はアーチ内の応力には小さく，床版の曲げモーメントに大きく寄与することを考え，ライズ比および床版の曲げ剛性，柱のバネ常数が活荷重により床版とアーチに生じる曲げモーメントに与える影響を調べた。

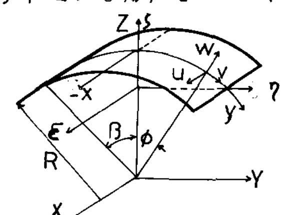


Fig.1. Definition of Geometrical Symbols

2．シェル要素の変位関数および基礎方程式

ここで用いた変位関数は，Cantin, Clough[1)] が提案したものである。この変位関数は Bogner らが提案した，面内変位 $u=a_1xy+a_2x+a_3y+a_4$，$v=a_5xy+a_6x+a_7y+a_8$，面外変位 $w=a_9x^3y^3+a_{10}x^3y^2+a_{11}x^3y+a_{12}x^3+a_{13}x^2y^3+a_{14}x^2y^2+a_{15}x^2y+a_{16}x^2+a_{17}xy^3+a_{18}xy^2+a_{19}xy+a_{20}x+a_{21}y^3+a_{22}y^2+a_{23}y+a_{24}$ を基にして，解の収束に必要な剛体変位の項すなわち(δ_ξ, δ_η, δ_ζ) の変位の項(1) および微小回転(θ_ξ, θ_η, θ_ζ) による項(2)

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_\xi \\ \delta_\eta \\ \delta_\zeta \end{Bmatrix} \quad (1) \quad , \quad \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -R(\cos\phi-\cos\beta) & -R\sin\phi \\ -R(1-\cos\phi\cos\beta) & -x\sin\phi & x\cos\phi \\ R\sin\phi\cos\beta & x\cos\phi & x\sin\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_\xi \\ \theta_\eta \\ \theta_\zeta \end{Bmatrix} \quad (2)$$

を加えあわせたつぎに示すものである。

$$\left.\begin{aligned} u &= a_1xy+a_2x+a_3y+a_4-a_6R\sin\phi-a_{20}R(\cos\phi-\cos\beta) \\ v &= a_5xy+a_6x\cos\phi+a_7y-a_8R(1-\cos\phi\cos\beta)-a_{20}x\sin\phi+a_{23}\cos\phi-a_{24}\sin\phi \\ w &= a_9x^3y^3+a_{10}x^3y^2+a_{11}x^3y+a_{12}x^3+a_{13}x^2y^3+a_{14}x^2y^2+a_{15}x^2y+a_{16}x^2+a_{17}xy^3+a_{18}xy^2+a_{19}xy+a_{20}x\cos\phi \\ &\quad +a_{21}y^3+a_{22}y^2+a_{23}\sin\phi+a_{24}\cos\phi+a_8R\sin\phi\cos\beta+a_6x\sin\phi \end{aligned}\right\} (3)$$

節点変位として，x軸まわりの回転に曲率半径Rを考慮した $[u_i, v_i, w_i, \partial w_i/\partial x, \partial w_i/\partial y - v_i/R, \partial^2 w_i/\partial x\partial y]$ を用いた。円筒シェルのひずみ，曲率と変位の関係式は，曲率を考慮したNovozhilovの浅いシェル理論の式—上記の剛体変位によって付加的なひずみが生じない式—

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x=\partial u/\partial x \ , \ \varepsilon_y=\partial v/\partial y+w/R \ , \ \varepsilon_{xy}=\partial u/\partial y+\partial v/\partial x \\ &\kappa_x=-\partial^2 w/\partial x^2 \ , \ \kappa_y=(1/R)(\partial v/\partial y)-\partial^2 w/\partial y^2 \ , \ \kappa_{xy}=(2/R)\cdot(\partial v/\partial x)-2\partial^2 w/\partial x\partial y \end{aligned}\right\} (4)$$

を用いた。

さらに，一般化された応力とひずみの関係式は，ヤング率をE，ポアソン比をν，板厚をt，板剛度をKとすれば，

$$\left.\begin{aligned} &N_x=(Et/1-\nu^2)(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y) \ , \ N_y=(Et/1-\nu^2)(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y) \ , \ N_{xy}=(Et/1+\nu)\,\varepsilon_{xy}/2 \\ &M_x=-K(\kappa_x+\nu\kappa_y) \ , \ M_y=-K(\kappa_y+\nu\kappa_x) \ , \ M_{xy}=-K(1-\nu)\,\kappa_{xy}/2 \end{aligned}\right\} (5)$$

である。

3．変位関数のための数値計算例

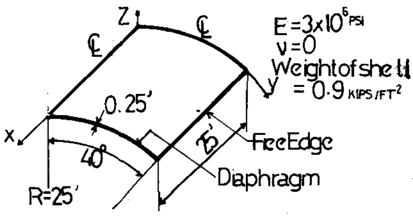
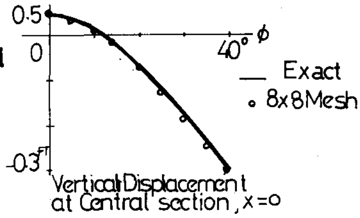
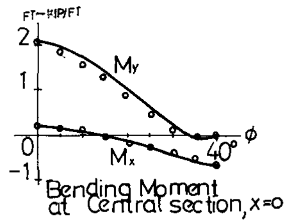


Fig. 2· Circular Cylinder





4−1．解析法1－柱を有しない場合[2)]－

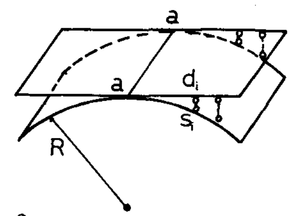


Fig.3. The Arch Bridge Treated

図3に示すように，床版とアーチはそれぞれの中心線で接合され，床版からアーチに伝達される力は鉛直力のみとする。まず，床版とアーチを切り離して考える。アーチの $\overline{aa}$ に単位荷重を順次作用させ，$\overline{aa}$ 上のたわみ $[\delta^e]$ を求める。$[\delta^e]$ はたわみ性行列であるので，逆変換をほどこし剛性行列 $[\delta^e]^{-1}$ を求め，これを床版の剛性行列に加えあわせる。この結果，鉛直力に関する項が，床版とアーチの両方の剛性性を持つことになる。このようにして求めた剛性行列を用いて，床版に載荷された荷重系における変位，応力を計算する。さらに，不静定力 $\{X\}$ は，先程求めた変位の $\overline{aa}$ に沿う $\{W\}$ に $[\delta^e]^{-1}$ を掛けあわせることによりもとめることができる。アーチの変位，応力は単位荷重を載荷したときの変位，応力に $\{X\}$ を掛けあわせることにより得ることができる。

4－2．解析法2－柱を有する場合－

柱の変形は変形前の軸方向のみ，すなわちZ軸方向のみとする。この手法も本質的には上記と同様である。床版に単位荷重および外荷重を作用させ，$\overline{aa}$ 上および柱との節合点 $\{d_i\}$ のたわみ $[\delta_d]$，$\{\delta_d^0\}$ を求め，さらにアーチに単位荷重を作用させて，同じ所のZ方向のたわみ $[\delta_s]$ を計算する。柱 i のバネ常数を k_i とすると不静定力 $\{X\}$ に関して，床版，アーチ，柱のそれぞれにつぎの関係式を得る。

$$\{\bar{\delta}_d\} = [\delta_d]\{X\} + \{\delta_d^0\} \quad (6),\quad \{\bar{\delta}_s\} = [\delta_s]\{X\} \quad (7),\quad \{\bar{\delta}_k\} = [k_i^{-1}]\{X\} \quad (8)$$

ただし，"－"は床版，アーチ，柱の連性を考えたときの荷重系によるたわみ量である。柱の圧縮量を正とし，Z軸の向きに注意すると，つぎのたわみに関する連続式

$$\{\bar{\delta}_d\} = \{\bar{\delta}_s\} - \{\bar{\delta}_k\} \quad (9)$$

をうる。式(9)に式(6),(7),(8)を代入し $\{X\}$ について解くとつぎのようになる。

$$\{X\} = \left([\delta_s] - [\delta_d] - [k_i^{-1}]\right)^{-1}\{\bar{\delta}_d^0\} \quad (10)$$

床版，アーチのそれぞれの応力，変位は上記の手法と同様にして求められる。

5．数値計算例

当日発表する予定です。

参考文献　1. Cantin, G., Clough, R.W. 'A Curved Cylindrical-Shell, Finit Element' AIAA vol.6 June 1968 pp1057-1062　2. Sabir, A.B., Ashwell, D.G., 'Finite Element Analysis of A Broad Arch Bridge with A Slab Deck'. Developments in Bridge Design and Construction' pp161-173