シミュレーション法による信頼性設計の一例

金沢大学工学部　正員　小堀為雄
〃　学生員○久保雅邦

1) まえがき

構造物の信頼性を論ずる際の一つのモデルに，ストレス－強度モデルがある。この場合，要因として部材強度のバラツキがあげられる。しかし，実際には，断面寸法のバラツキ，すなわち，製作誤差も信頼性に影響するであろう。本報告は，このことに注目して解析を進める一つの手法について研究した成果の一部を報告するものである。確率変数のうち，構造物が設計施工を完了した状態では，その構造物固有の確定量となるものを内部変数，また，外荷重や地震動の場合の支点変位量等を外部変数と呼び，前者はバラツキが小さく，後者は非常に大きいと考えられる。

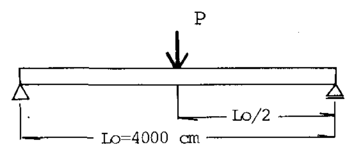

Fig-1

Table-1

内部変数	材料強度	σ_a (μ,σ)=N(2000,20) Kg/cm^2
	断面係数	W (μ,σ)=N(5000,40) cm^3
外部変数	荷重	P (μ,σ)=N(8000,700) Kg

本研究では，Fig-1に示す一定断面の中央点集中荷重モデルを考え，確率変数としてTable-1に示すものを考えた。各変数は，互いに独立で正規分布をなすものとする。

2) 信頼性設計の基礎式

信頼性Rは，荷重Pと耐力Paから次式で表わされる。

$$R=\int_{-\infty}^{\infty} f_{pa}(Pa)\int_{-\infty}^{Pa} f_p(P)\,dP\,dPa \qquad \text{-----}(1)$$

$f_{pa}(Pa)$は，確率変数σ_aとWの非線型関数 $Pa={}^{4\sigma_a W}/L_o$ の確率密度関数であり，$f_{\sigma a}(\sigma_a)$と$f_W(W)$を用いて次式で表わされる。

$$f_{pa}(Pa)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\sigma a}(\sigma_a)\, f_W(W)\left|\frac{dW}{dPa}\right| d\sigma_a \qquad \text{----}(2)$$

(2)式の積分は超越関数となり，確率変数Paは厳密には正規分布を示さず，(1)式による理論解を得ることは困難であるが，次のようにして近似解を得ることができる。

3) 数値計算による近似解

内部変数σ_aとWは，平均値のまわりに小さい分散を持って変動するものであることを考えると，積分区間は有界な閉領域Dと見なすことができ，微小区間$\Delta\sigma_a$, ΔWで分割して考えると(1)式と(2)式から次式が得られる。(Fig.-2)

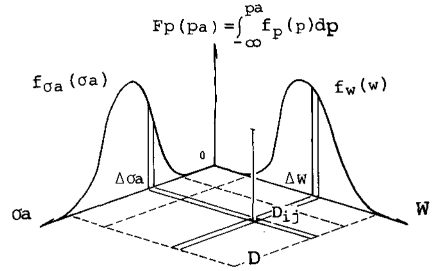

Fig.-2

$$R=\iint_D f_{\sigma a}(\sigma_a)\, f_W(W)\int_{-\infty}^{Pa} f_P(P)\,dP\,dW\,d\sigma_a \qquad \text{----}(3)$$

$$R=\sum_i\sum_j\int_{\sigma_{ai}}^{\sigma_{ai}+\Delta\sigma_a}\int_{W_j}^{W_j+\Delta W} f_{\sigma a}(\sigma_a)\, f_W(W)\int_{-\infty}^{P_a} f_P(P)\, dP\, d\sigma_a\, dW \qquad ----(4)$$

(4)式において，$f_P(P)$の累積分布関数を数値計算するためにP_aを範囲D_{ij}で任意の点に固定すれば，そのとり方によって，Rは最大値R_{max}と最小値R_{min}をとり，$R_{min} \leqq R \leqq R_{max}$となる。$\Delta R = R_{max} - R_{min}$とすれば，

$$\Delta R=\sum_i\sum_j\int_{\sigma_{ai}}^{\sigma_{ai}+\Delta\sigma_a}\int_{W_j}^{W_j+\Delta W} f_{\sigma a}(\sigma_a)\, f_W(W)\, d\sigma_a\, dW\int_{P_{aij}}^{P_{aij}+\Delta P_a} f_P(P)\, dP \qquad ----(5)$$

ここに，$P_{aij}=\frac{4}{L_0}\sigma_{ai}W_j$

増分 $\Delta P_a=\frac{4}{L_0}(\sigma_{ai}\Delta W + W_j\Delta\sigma_a + \Delta\sigma_a\Delta W)$

したがって，$\Delta\sigma_a$, ΔWを適当に小さくとればΔRは収束し，(4)式より信頼性RはR_{min}あるいはR_{max}とR_{min}の相加平均として近似計算することができる。

《計算例》

Table-1に示した確率変数に対して計算した結果をFig.-3に示す。この場合，σ_a, W に対する領域Dのとり方もRに影響するが通常の信頼性のオーダー(10^{-3}～10^{-5})の場合，Z_0=5.0～7.0で十分Rは収束する。横軸は$\Delta\sigma_a$, ΔWを規準化したΔZで示し，縦軸はΔRと$(1-R)/10$をとった。

この結果，有限回のくり返し計算で信頼性Rを推定することが可能であるといえる。

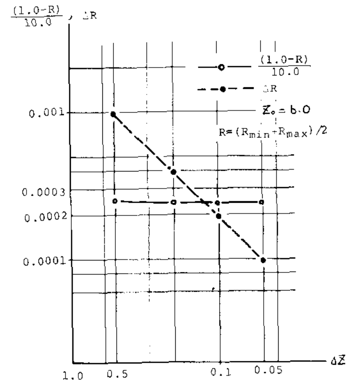

Fig.-3

4) $f_{Pa}(P_a)$を正規分布とみなす方法

厳密には確率変数P_aは正規分布を示さないが，確率変数σ_aとWの変動係数$V=\sigma/\mu$が適当である場合，その非線型関数も正規分布をなすと見なすことができる。モンテカルロシミュレーション法によって作成したP_aについて，5%有意水準でχ^2検定を行った結果正規分布であると見なすことができたので，$f_{Pa}(P_a)$を最尤推定量を持つ正規分布と見なした場合との比較をTable-2に示す。

Table-2

《Paを正規分布とみなした場合》		
変動係数	$V_{\sigma a}$=1.0	V_W=0.8 (%)
最尤推定量	Pa(μ,σ)=N(10000,128.07) Kg	
信頼性	R=0.99752	
《くり返し数値計算による場合》		
信頼性	R=0.99760	

5) あとがき

信頼性設計へのアプローチとして，簡単なモデルについて計算を行ったが，式(2)が超越関数となることから，これを理論的に求めることが困難であり数値計算による近似解を求めることを試みた。その結果，有限回のくり返し計算で近似解を求め得ることがわかる。しかしながら実際の構造物の設計にあたっては，要因の数も多く全てこのような計算で行うには，計算のくり返し数が極めて多くなり，またくり返しによる誤差の積み重なりの問題からしても好ましくない。さらに4)の比較からも，数値計算を行うよりも，非線型関数を正規分布と見なして設計を進めることも有利であり，現在さらに有効な解析プログラムを検討中である。

《参考文献》 (1). 星谷 勝：“確率論手法による構造解析” 鹿島出版会

(2). 岩壷，北川，他訳：“信頼性を考える材料力学／設計” 学献社