両側半楕円切欠きを有する帯板の応力解析

名古屋工業大学　○学生員　堀内保善
〃　　　　　　正　員　長谷部宣男

<u>まえがき</u>　両側に半楕円切欠きを有する帯板の表わす領域の内部を単位円内部に等角写像する関数を求め、これをもとに分数式の和の形の有理型写像関数を作り、これを用いてMuskhelishviliの方法により応力解析を行なう。

<u>有理写像関数</u>　図-1-(C)に示す両側に半楕円切欠きを有する帯板領域を単位円内部に等角写像する関数は図-1-(a)に示す両側に切込みを有する帯板領域を単位円に写像する関数 Z_1 と、図-1-(b)に示す帯板領域を単位円に写像する関数 Z_2 との和すなわち次式で表わされる

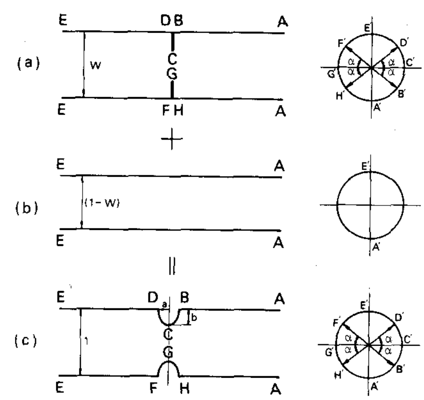

Fig. 1

$$Z = iK_1Z_1 + iK_2Z_2$$

$$= iK_1\int\frac{(1-\zeta^2)\,d\zeta}{(1+\zeta^2)(e^{-i\alpha}-\zeta)^{\frac{1}{2}}(e^{i\alpha}-\zeta)^{\frac{1}{2}}(e^{-i\alpha}+\zeta)^{\frac{1}{2}}(e^{i\alpha}+\zeta)^{\frac{1}{2}}} + iK_2\int\frac{d\zeta}{1+\zeta^2} \quad ----(1)$$

ただし係数 K_1, K_2 はそれぞれの帯板の幅を W、$(1-W)$ とするように定められる係数で

$K_1 = 2\cos\alpha\cdot W/\pi$　、$K_2 = 2(1-W)/\pi$

パラメーター α と W を変えることにより、半楕円の大きさおよび形を変えることができる。

次に(1)式を収束の速い項、遅い項とに分解してそれぞれの項に対する分数式の和の形の有理写像関数を作る（文献(1), (2)参照）。結局求めるべき有理写像関数は次のように表わされる。

$$Z = \omega(\zeta) = \sum_{j=1}^{13}\frac{-\frac{B_j}{2}i(K_1A+K_2)}{\frac{1}{\sqrt{\beta_j}}-\zeta} + \sum_{j=1}^{13}\frac{-\frac{B_j}{2}i(K_1A+K_2)}{-\frac{1}{\sqrt{\beta_j}}-\zeta} + iK_1\Bigg[\sum_{j=1}^{10}\frac{2\cdot C\frac{A_j}{\sigma_j}e^{-\frac{3}{2}i\alpha}}{\frac{e^{-i\alpha}}{\sigma_j}-\zeta} + \sum_{j=1}^{10}\frac{2\cdot D\frac{A_j}{\sigma_j}e^{\frac{3}{2}i\alpha}}{\frac{e^{i\alpha}}{\sigma_j}-\zeta}$$

$$+\sum_{j=1}^{10}\frac{2\cdot E\frac{A_j}{\sigma_j}e^{-\frac{3}{2}i\alpha}}{-\frac{e^{-i\alpha}}{\sigma_j}-\zeta} + \sum_{j=1}^{10}\frac{2\cdot F\cdot\frac{A_j}{\sigma_j}\cdot e^{\frac{3}{2}i\alpha}}{-\frac{e^{i\alpha}}{\sigma_j}-\zeta} + \sum_{k=1}^{13}\frac{\frac{G_k}{2}}{\frac{1}{\sqrt{\gamma_k}}-\zeta} + \sum_{k=1}^{13}\frac{\frac{G_k}{2}}{-\frac{1}{\sqrt{\gamma_k}}-\zeta}\Bigg] \quad --------(2)$$

係数 A, C, D, E, F は式(1)を収束の速い項と遅い項とに分けたときの各項の係数である。

<u>解法</u>　ζ 平面の単位円内で正則な複素応力関数を $\varphi(\zeta)$、$\psi(\zeta)$ とすると、満足すべき境界条件は、単位円周上　$\sigma = e^{i\theta}$ で

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = i\int(P_x + iP_y)\,ds \equiv H(\sigma) \quad -------(3)$$

である。P_x、P_y は、境界上で与えられたそれぞれ x、y 方向の外力，S に関する積分は、境界線に沿う積分を表わす。上式に $1/2\pi i\cdot d\sigma/\sigma-\zeta$ を乗じ $\omega(\zeta)$ が有理関数であることを用いて単位円周上で積分すると今の場合，複素応力関数 $\varphi(\zeta)$ は

$$\varphi(\zeta) + \sum_{k=1}^{92}\frac{\overline{C_k}\,\overline{A_{k0}}\,\zeta_k^2}{\zeta_k-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{H(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,d\sigma \equiv A(\zeta) \quad ---------(4)$$

となる[3]。ただし $A_{k0}=\varphi(\zeta_k')$ $\zeta_k'=1/\bar{\zeta}_k$ 、また定数項は応力の計算には関係しないので省略した。

上式の両辺をζに関して1回微分し、$\zeta=\zeta_k'$ ($k=1\sim92$) を代入すると未定定数 A_{k0} に関する連立方程式を得る。A_{k0}を実部、虚部に分解することによって184元1次の連立方程式となるが、今の場合対称性より $\omega(\zeta)$の極ζ_kは互いに共役な複素数ならびに実数とからなる。そこでそれぞれの極の個数を $2n_1$, n_2とし $A_{k0}=X_k+iY_k$と書くと(4)式は

$$\varphi(\zeta)+\sum_{k=1}^{n_1}\left(\frac{\bar{C}_k\zeta_k^2}{\zeta_k-\zeta}+\frac{C_k\bar{\zeta}_k^2}{\bar{\zeta}_k-\zeta}\right)X_k+i\sum_{k=1}^{n_1}\left(\frac{C_k\bar{\zeta}_k^2}{\bar{\zeta}_k-\zeta}-\frac{\bar{C}_k\zeta_k^2}{\zeta_k-\zeta}\right)Y_k+\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2}\frac{\bar{C}_k\zeta_k^2}{\zeta_k-\zeta}X_k\equiv A(\zeta)\quad\text{-----}(5)$$

と書ける。(5)式を使って結局 $(2n_1+n_2)=92$ 元連立方程式を解くことによって A_{k0} が得られ $\varphi(\zeta)$が求まる。それから$\psi(\zeta)$も簡単に求められる。

計算例 図-2〜図-5に示すように $a=0.638$ $b=0.125$ なる楕円切欠きおよび $\rho=0.1$ なる円弧切欠きのある帯板に荷重として単位引張と単位偶力を作用させた場合について応力分布を求めた。境界条件として(4)式の $A(\zeta)$の一次導関数は

1) 引張の場合 $A(\zeta)=\frac{1}{\pi}(1-\zeta^2)$

2) 偶力の場合 $A(\zeta)=\dfrac{\zeta\sin2\theta_0}{\zeta^4-2\zeta^2\cos2\theta_0+1}$

である。(文献-(2)参照)

両側に半円切欠きを有する帯板の解析例として摂動法を用いた石田の解[4]がある。上の1), 2)の荷重状態に対し石田の解はそれぞれ $\sigma_{max}=3.04$, $\sigma_{max}/T=3.10$となるのに対し本計算では $\sigma_{max}=3.034$ $\sigma_{max}/T=3.10$ となった。ただしTは材料力学より求められる縁応力 $T=M\cdot y/I$ の値で、本計算例では6である。

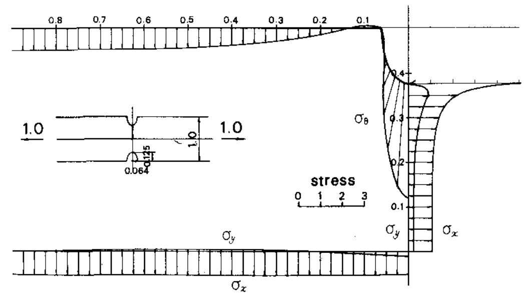

Fig. 2

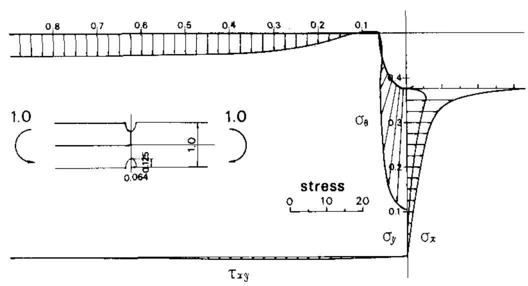

Fig. 3

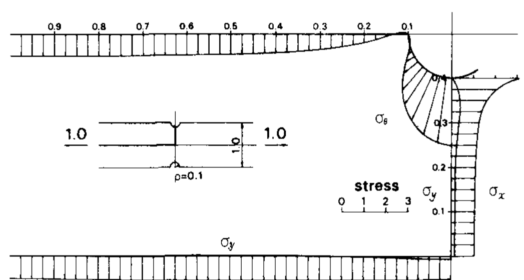

Fig. 4

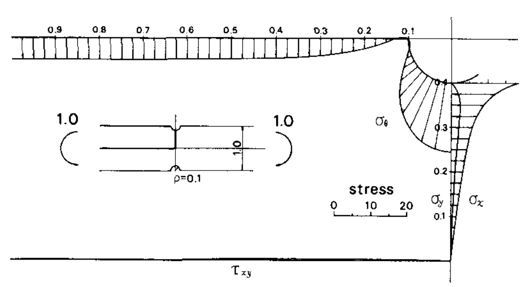

Fig. 5

文献(1), (3) 長谷部宣男 土木学会論文報告集 194, 185 号

文献(2) 松本博嗣 名工大 土木修士論文 1973

文献(4) 石田誠 日本機械学会論文集 19巻 83, 87 号