空間オキュパンシーと交通密度に関する基礎的考察

信州大学工学部　正員　奥谷巖

1．まえがき

交通制御における交通情報の役割は重要である。今回は，種々の交通情報のうち，とくに空間オキュパンシーと交通密度をとり挙げ，その基礎的特性について考察する。

2．空間オキュパンシー[1)]

(1)．1車線の場合

空間オキュパンシーとは，ある一定長さ（いま，これをLで表わす）の道路区間内に存在する車の延べ長さがその区間長に占める割合のことであり、空間オキュパンシーをいまO_sで表わすものとすれば，　$O_s=\sum_{i=1}^{n} l_i/L$　(1)　となる。ここに，nはL内に存在する車の台数，l_iは第i番目の車の車長lの分布がガンマー分布をなすものとすれば，l/Lも当然ながらガンマー分布にしたがうはずである。したがって，$x=l/L$としたとき，その確率密度関数$f_\beta(x)$は次式で与えられる。
$f_\beta(x)=\alpha^\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x}/(\beta-1)!$　(2)　ここに，$\bar{l}$をlの平均値とするとき，　$\alpha=\beta L/\bar{l}$　(3)
なる関係がある。式(1)で与えられる空間オキュパンシーは，xのn個の和となっているから，その確率密度関数は$f_\beta(x)$のn重たたみ込みによって表現されることになる。したがって，いまそれを式(2)に対するモーメント生成関数を利用して求めてみると，けっきょく，空間オキュパンシーの確率密度関数$f_{\beta n}(X)$は　$f_{\beta n}(X)=\alpha^{\beta n}X^{\beta n-1}e^{-\alpha X}/(\beta n-1)!$　(4)　となる。式(4)で表わされるような確率密度関数をもつ空間オキュパンシーXの平均値を$\bar{O}_s$で表わすと，それは式(3)も考慮して　$\bar{O}_s=\beta n/\alpha=n\bar{l}/L$　(5)　となる。また，n自身が確率変数であると考え，Lなる区間内にn台の車が存在する確率を$P_n(L)$とすると，空間オキュパンシーの確率密度関数$g(X)$は　$g(X)=\sum_{n=1}^{\infty}P_n(L)f_{\beta n}(X)$　(6)　として求められる。$P_n(L)$は3で述べる交通密度の確率分布と解されるが，これは観測結果によって与えるのが妥当であろう。空間オキュパンシーの確率密度関数が式(4)で与えられるとき，その分散はこれをσ_s^2とすると　$\sigma_s^2=\beta n/\alpha^2=n\bar{l}^2/L^2\beta$　(7)　となる。またnが変動するとした場合の分散$\tilde{\sigma}_s^2$は，式(6)を利用して　$\tilde{\sigma}_s^2=\bar{l}^2\cdot\sigma_k^2+\sigma_s^2$　(8)　と与えられる。ここに，σ_k^2は交通密度の分散である。

(2)．多車線の場合

つぎに，m車線道路の空間オキュパンシーとして　$Y=\sum_{j=1}^{m}\{\sum_{i=1}^{n}l_i^j\}/mL$　(9)　を考える。ただし，l_i^jは第j番目車線第i番車の車長であり，nは各車線同一とした。式(9)は式(1)をmで除した値のm個の和と考えられるから，まず，式(2)のxとして　$x=l/mL$　(10)　を考える。そうすると，式(3)に対応する関係として　$\alpha=m\beta L/\bar{l}$　(11)　が成立する。また，式(2)の確率密度関数に対するモーメント生成関数を$M_1(Z)$とすると　$M_1(Z)=\{\alpha/(\alpha-Z)\}^\beta$　(12)　と表わされるから，Yの確率密度関数を$h(Y)$としたとき，それに対応するモーメント生成関数$M_2(Z)$は，
$M_2(Z)=[\{M_1(Z)\}^n]^m=\{\alpha/(\alpha-Z)\}^{\beta nm}$　(13)　となる。したがって，　$h(Y)=\alpha^{\beta nm}Y^{\beta nm-1}e^{-\alpha Y}/(\beta nm-1)!$　(14)　となり，Yの平均値$\bar{O}_s^m$および分散　は，式(11)，式(12)を考慮すると　$\bar{O}_s^m=\beta nm/$

$\alpha = n\bar{l}/L$　(15)　$\hat{\sigma}_s^2 = \sigma_s^2/m$　(16)　となる。なお，β，$\bar{l}$が各車線等しいとして，nが各車線ごとに，n_1，n_2，……，n_m と異なる場合の空間オキュパンシー確率密度関数$\tilde{f}(Y)$ に対応するモーメント生成関数を$M_3(Z)$とすると　$M_3(Z) = \{M_1(Z)\}^{n_1} \cdot \{M_1(Z)\}^{n_2} \cdots \{M_1(Z)\}^{n_m} = \{\alpha/(\alpha - Z)\}^{n_1 + n_2 + \cdots + n_m}$　(17)　となる。したがって，$\tilde{f}(Y) = \alpha^{\beta m \bar{n}} Y^{\beta m \bar{n} - 1} e^{-\alpha Y}/(\beta \bar{n} m - 1)!$　(18)　となり，式(15)と一致する。ここに，　$\bar{n} = \sum_{i=1}^{m} n_i/m$　(19)　である。

3．交通密度

(1)．1車線の場合

いま，Lという区間の中にn台の車が存在するとした場合，交通密度kは次式で定義される。
$k = n/L$　(20)　この確率分布は交通量あるいは車の速度の分布等に影響されるが，これらをすべて考慮に入れたものを理論的に導くことは非常に困難を伴なうので，以下では一つの単純化された考え方のもとに，おおまかな考察を行なってみる。いま，対象区間Lを車が1台だけ入り得る小区間に分けて考える。小区間の長さをl_0とすると，Lに入り得る最大の車の台数Nは　$N = L/l_0$　(21)
で与えられる。また，いま対象としている区間の平均交通密度を$\bar{k}$とすると，l_0なる区間に1台の車が入っている確率ϕは　$\phi = \bar{k} l_0$　(22)　となる。したがってLなる区間にn台の車が存在する確率$P_n(L)$は，二項分布を適用すると　$P_n(L) = \{N!/(N-n)!\,n!\} \cdot \phi^n (1-\phi)^{N-n}$　(23)
となる。これはとりもなおさずn/Lなる交通密度をもつ確率である。式(23)で表わされる確率分布に対する母関数を$M_4(Z)$とすると　$M_4(Z) = \sum_{n=0}^{N} P_n(L) Z^n = (\phi Z + 1 - \phi)^N$　(24)　となる。式(21)，式(22)および式(24)より，nの平均値$\bar{n}$は　$\bar{n} = M_4'(Z)|_{Z=1} = N\phi = L\bar{k}$　(25)　となるから，交通密度の平均値はこの値をLで割ればよく，$\bar{k}$となって矛盾はないことがわかる。また，分散はσ_k^2は
$\sigma_k^2 = [M_4''(Z)|_{Z=1} + \{M_4'(Z)|_{Z=1}\} - \{M_4'(Z)|_{Z=1}\}^2]/L^2 = \bar{k}(1 - \bar{k} l_0)/L$　(26)　となる。これより，交通密度の分散は区間長に反比例し，平均交通密度については2次の関係をもっており，飽和密度をk_j（$= 1/l_0$）としたとき，$k_j/2$で最大となり，低密度および高密度の領域では分散が小さくなることがわかる。

(2)．多車線の場合

m車線道路の長さLの区間の交通密度がn/Lとなる確率は，当該区間の中に$m \cdot n$台の車が存在する確率に等しい。なぜならば，その場合の交通密度をkとすると　$k = mn/mL = n/L$　(27)
となるからである。したがって，いま求める確率を$\overset{*}{P}_{mn}(L)$とすると，まず，これに対応する母関数$M_5(Z)$が，　$M_5(Z) = \{M_4(Z)\}^m = (\phi Z + 1 - \phi)^{mN}$　(28)　となるから，　$\overset{*}{P}_{mn}(L) = \{(mN)!/(mN - mn)!\,(mn)!\} \cdot \phi^{mn} (1-\phi)^{mN - mn}$　(29)　として求められる。区間L内に存在する車の台数の平均値は，いま，それを$\overset{*}{n}$とすると　$\overset{*}{n} = M_5'(Z)|_{Z=1} = mN\phi = mL\bar{k}$　(30)　交通密度の平均値は，したがって，上の値をmLで割ればよく$\bar{k}$となる。また，分散を$\hat{\sigma}_k^2$で表わすものとすれば，式(28)を用いることにより，　$\hat{\sigma}_k^2 = [M_5''(Z)|_{Z=1} + M_5'(Z)|_{Z=1} - \{M_5'(Z)|_{Z=1}\}^2]/m^2 L^2 = \bar{k} \cdot (1 - \bar{k} l_0)/mL$　(31)　となり，式(26)で表わされる分散が車線数分の1に縮少された形となっている。

4．むすび　今後の実証的な研究をとおして，制御上での取り扱いについての検討が必要である。

参　考　文　献

1) 奥谷，中浜：オキュパンシーの特性について，第10回日本道路会議一般論文集，PP581～582，昭和46年10月