

浅海波の変形に関する一考察

名古屋工業大学

正員 石田 昭

1. はしがき：浅海波の変形現象は Shoaling のほかに、一定水深でも変形する現象として二次波峯現象とか、Soliton 波などが知られている。Zabusky らは浅海波の変形を KDV 方程式を差分化して数値的に求め Soliton 波が発生することを説明している。その中で x 軸上の条件を与えるのに、 t 軸上の実験記録を用いているが、両者を同じとみることは波が定形波であることを意味するのであかしいと思われる。そこで任意波形の波速を求める Boussinesq の解を使って、変形現象を説明しようと試みた。ここでは二次波峯現象の波形を用いてその妥当性を検討したものである。

2. 波形の表示：文献2)のように二次波峯現象の波形は高次成分を除いて、次のような6個の成分から構成されているものとする。

$$\begin{aligned} \eta(t, x) = & A_{01} \cos(k_0 x - 2\pi f_0 t) + A_{02} \cos(2k_0 x - 4\pi f_0 t + \theta_{02}) \\ & + A_{03} \cos(3k_0 x - 6\pi f_0 t + \theta_{03}) + A_{11} \cos\{(k_0 + \Delta k)x - 2\pi f_0 t + \theta_{11}\} \\ & + A_{12} \cos\{(2k_0 + \Delta k)x - 4\pi f_0 t + \theta_{12}\} \\ & + A_{13} \cos\{(3k_0 + \Delta k)x - 6\pi f_0 t + \theta_{13}\} \quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここで k_0 , f_0 は基本波の波数と周波数であり、 Δk は二次波峯の発生間隔の逆数である。Boussinesq の解によれば波速は次式で与えられる。

$$C^2 = gh \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h} + \frac{h^2}{3\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

(1) 式を (2) 式に代入すれば波速 C は t と x の関数として与えられる。そこで $\eta(0, x)$ および $C(0, x)$ の値から Δt 時間後の波形 $\eta'(\Delta t, x)$ を求めることを考える。図-1において $AC = C(0, x) \Delta t$

$$BD = C(0, x + \Delta x) \Delta t \quad \text{したがって } CD \text{ の勾配は近似的に}$$

$$\frac{(\eta(0, x + \Delta x) - \eta(0, x))}{(C(0, x + \Delta x) \Delta t + \Delta x - C(0, x) \Delta t)}$$

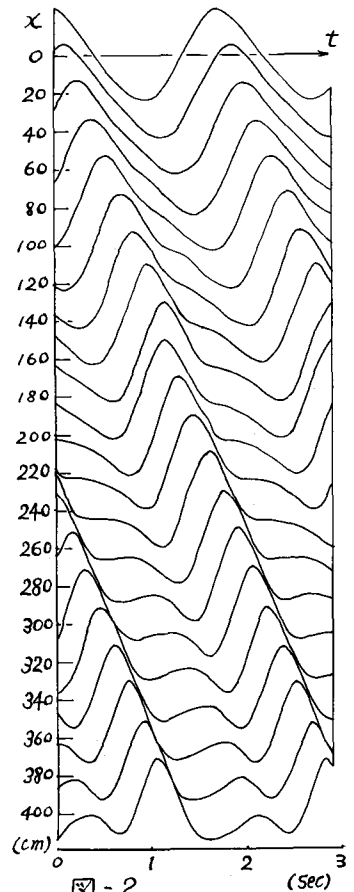
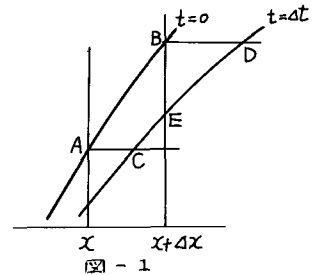
とよから $\eta'(\Delta t, x)$ は次式によって求められる。

$$\begin{aligned} \eta'(\Delta t, x + \Delta x) = & \frac{\eta(0, x + \Delta x) - \eta(0, x)}{C(0, x + \Delta x) \Delta t + \Delta x - C(0, x) \Delta t} \times (\Delta x - C(0, x) \Delta t) \\ & + \eta(0, x) \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

こうして得られる $\eta'(\Delta t, x + \Delta x)$ さらに x に關してフーリエ変換し各成分の振幅を求めて (2) 式に代入し、 $C'(\Delta t, x)$ を求める。

この操作を順々に繰り返して行けば任意時間後の波形を求めることができる。

3. 解析結果：解析に用いた波は文献2)で述べた Data No. 3 および Data No. 4 の波であるが諸量は表-1に示すようなものである。



NO.4の値を(1)式に代入して $\eta(t, x)$ をプロットしたのが図-2である。 $x=380\text{cm}$ 付近ではっきりと二次波峰が出現していること、およびその速度が主峰より遅いことなどから、(1)式の表示方法が現象を十分に表現できる妥当なものであることがわかる。図-3(a)および(b)は $\eta(0, x)$, $\eta(\Delta t, x)$, $C(0, x)$ および $\eta'(\Delta t, x)$ を示したものである。 $\eta(0, x)$ および $\eta(\Delta t, x)$ からわかるようにx軸上の記録(図-2)は周期性を帯びていて、x軸上では周期性を帯びない。したがってZabuskyらの解析方法に疑問が生ずる。 $C(0, x)$ は $\eta(0, x)$ とほぼ同じような傾向に変化している。これは(2)式において才2項の値が才3項の値より大きな影響を波速に与えていることを示している。また表-1からわかるように観測によれば、基本波の波速はNO.3の波が141 cm/sec, NO.4の波が135 cm/secであるのに対して、(2)式によればNO.3が155 cm/sec, NO.4が152 cm/secという大きな値になることがわかる。 $\eta'(\Delta t, x)$ は(3)式によって計算したものであるが、波峰

Data NO.	3	4
h (cm)	20	20
T (sec)	1.77	1.76
L (cm)	250	238
X (cm)	640	720
C_0 (cm/sec)	141	135
Δt (sec)	0.1	0.1
Δx (cm)	20	20
h/L	0.080	0.084
A_{01} (cm)	2.54	1.84
A_{02}	0.83	0.65
A_{03}	0.14	0.22
A_{11}	0.93	0.53
A_{12}	1.07	0.61
A_{13}	0.49	0.18
θ_{01} (rad)	-0.08	0.11
θ_{02}	0.01	-0.10
θ_{03}	0.01	0.06
θ_{11}	3.10	3.67
θ_{12}	3.48	2.93

表-1

Data No. 4

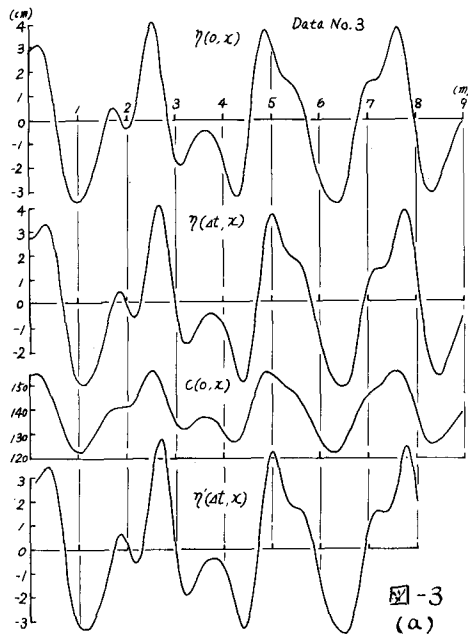


図-3 (a)

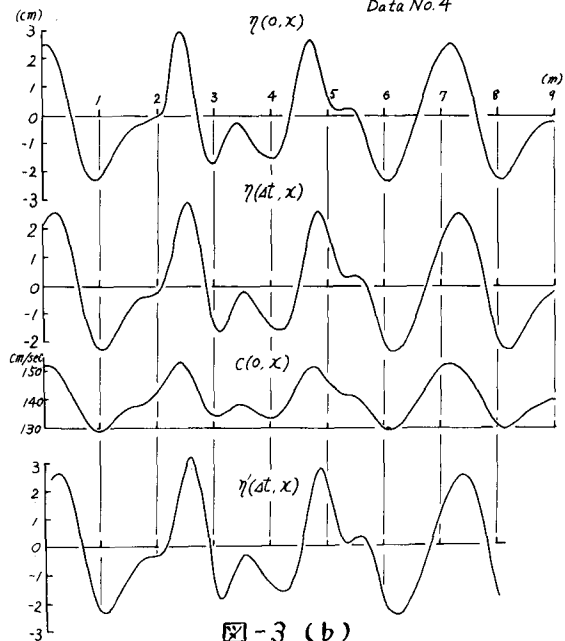


図-3 (b)

の移動する位置は $\eta(\Delta t, x)$ の波峰の位置とほぼ一致しており、波形も $\eta(\Delta t, x)$ に近い値となっている。したがって、この方法を順々に繰り返せばある程度までの時間内ならば、変形を説明し得ると思われる。この方法によれば周期性をもたないx軸上の任意の波形がどのように変形して行くかが判明する。今後はさらにも増した場合の計算プログラム、およびBoussinesqの波動方程式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \eta \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h} + \frac{h^2}{3\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \right\}$$

を差分化するプログラムを研究する必要があると思われる。

- 1) Zabusky, N.J. and Galvin, C.T.; Shallow-water waves, the Korteweg-de Vries equation and solitons, J.F.M. 1971 Vol.47
- 2) 石田 昭; 二次波峰を構成する成分波の振幅に對する研究 土木学会26回年次学術講演会講演集 1971年.