浮遊物を含むシアー乱流のスペクトル構造

信州大学 工学部 (正) 佐々木 八郎
〃 (〃) ○余越 正一郎
信州大学 大学院 (学) 松井 清

1. Prologue

河川における混相乱流の研究は，浮遊砂の輸送問題に関連して，土砂濃度と最大乱子の諸特性との関係に集中しているが，土粒子を non-dynamical として取扱うものが多い。 本文は河川の wash load を念頭において，微細な固体粒子を含むシアー乱流のエネルギースペクトルの構造について考察をするものである。

密度 ρ，速度 $\tilde{v}_i$，圧力 $\tilde{p}$ の非圧縮性流体中に，密度 ρ_s，半径 a，速度 $\tilde{w}_i$ の球形固体粒子が体積濃度 θ で存在している状態を記述するに適当と思われる連続方程式と運動方程式を列記する。

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-\theta)+\frac{\partial}{\partial x_k}(1-\theta)\tilde{v}_k=0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\theta\tilde{w}_k=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\tilde{v}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)(1-\theta)\rho\tilde{v}_i=-(1-\theta)\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x_i}-(1-\theta)\rho g\,\delta_{i3}+\frac{\partial\tau_{ki}}{\partial x_k}-R_i,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+w_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\theta\rho_s\tilde{w}_i=-\theta\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x_i}-\theta\rho_s g\,\delta_{i3}+\frac{\partial\tau^{(s)}_{ki}}{\partial x_k}+R_i,$$

$$\frac{R_i}{\theta}=\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\tilde{w}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)(\tilde{v}_i-\tilde{w}_i)-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x_i}+c\left[(\tilde{v}_i-\tilde{w}_i)+a\sqrt{\frac{\rho}{\pi\mu}}\int_{\infty}^{t}\left(\frac{\partial}{\partial t}+w_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\frac{(\tilde{v}_i-\tilde{w}_i)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\right],$$

ここに τ_{ki} は流体の粘性応力テンソル，$\tau^{(s)}_{ki}$ は固体粒子同志の直接相互作用により生じる応力，R_i は単位体積あたりの流体と粒子の相互作用力，$c=9\nu/2a^2$ は relaxation time の逆数である。

2. 基礎方程式系

粒子の濃度が小さく ($\theta\ll 1$)，粒径は最小乱子の径より小さい場合を考えると，$\tau^{(s)}_{ki}\ll\tau_{ki}$，$\tau_{ki}=\mu(\partial\tilde{v}_i/\partial x_k+\partial\tilde{v}_k/\partial x_i)$，$\mu$ は Einstein の式より $\mu=\mu_0(1+2.5\theta)$，μ_0 は一様流体の粘性係数である。 さらに，粒子と流体の相互作用力は Stokes の力のみであるとすれば式は簡単になる。

$$\text{(1)}\quad \frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial x_k}=0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\theta\tilde{w}_k=0,$$

$$\text{(2)}\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\tilde{v}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\tilde{v}_i=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x_i}-g\,\delta_{i3}+\nu\frac{\partial^2\tilde{v}_i}{\partial x_k^2}-c\theta(\tilde{v}_i-\tilde{w}_i),$$

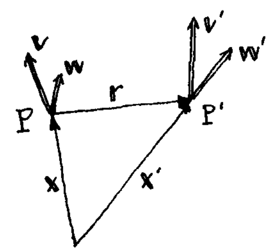
$$\text{(3)}\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\tilde{w}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\tilde{w}_i=-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x_i}-g\,\delta_{i3}+c\kappa(\tilde{v}_i-\tilde{w}_i), \qquad (\kappa=\rho/\rho_s).$$

ここで，　$\tilde{v}_i(\mathbf{x},t)=V_i(\mathbf{x})+v_i(\mathbf{x},t)$，　$\tilde{w}_i(\mathbf{x},t)=W_i(\mathbf{x})+w_i(\mathbf{x},t)$，　$\tilde{p}(\mathbf{x},t)=P(\mathbf{x})+p(\mathbf{x},t)$　とおく。　これを(2)，(3)式に代入して平均をとった式と，もとの式との差を作ると乱れに関する式がえられる。

$$(4)\quad \frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+V_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}(v_iv_k)-\frac{\partial}{\partial x_k}\langle v_iv_k\rangle=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}-c\theta(v_i-w_i),$$

$$(5)\quad \frac{\partial w_i}{\partial t}+w_k\frac{\partial W_i}{\partial x_k}+W_k\frac{\partial w_i}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}(w_iw_k)-\frac{\partial}{\partial x_k}\langle w_iw_k\rangle=-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial p}{\partial x_i}+cK(v_i-w_i),$$

3．相関の伝播方程式



乱流場は一様と仮定し，右図のようなベクトル配置を考える。P'点における量には prime をつけてあらわす。　P点におけるvに関する式のi成分を $\boxed{eq.v}_i^{(P)}$，P'点におけるwに関する式のj成分を $\boxed{eq.w}_j^{(P')}$ というような記号で表わすことにして，次のような操作を行なう。

$$\left\langle\left(v_j'\times\boxed{eq.v}_i^{(P)}\right)+\left(v_i\times\boxed{eq.v}_j^{(P')}\right)\right\rangle,\quad \left\langle\left(w_j'\times\boxed{eq.w}_i^{(P)}\right)+\left(w_i\times\boxed{eq.w}_j^{(P')}\right)\right\rangle,$$

$$\left\langle\left(w_j'\times\boxed{eq.v}_i^{(P)}\right)+\left(w_i\times\boxed{eq.v}_j^{(P')}\right)\right\rangle+\left\langle\left(v_j'\times\boxed{eq.w}_i^{(P)}\right)+\left(v_i\times\boxed{eq.w}_j^{(P')}\right)\right\rangle,$$

その結果，次がえられる。　このとき，流体と粒子の平均速度は等しいと考える。

$$(6)\quad \frac{\partial}{\partial t}R_{ij}^{(v)}+R_{kj}^{(v)}\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+R_{ik}^{(v)}\frac{\partial V_j'}{\partial x_k'}+(V_k'-V_k)\frac{\partial}{\partial r_k}R_{ij}^{(v)}-T_{ij}^{(v)}$$
$$=-\frac{1}{\rho}P_{ij}^{(v)}+2\nu\frac{\partial^2}{\partial r_k^2}R_{ij}^{(v)}+c\theta(B_{ij}-2R_{ij}^{(v)}),$$

$$(7)\quad \frac{\partial}{\partial t}R_{ij}^{(w)}+R_{kj}^{(w)}\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+R_{ik}^{(w)}\frac{\partial V_j'}{\partial x_k'}+(V_k'-V_k)\frac{\partial}{\partial r_k}R_{ij}^{(w)}-T_{ij}^{(w)}$$
$$=-\frac{1}{\rho_s}P_{ij}^{(w)}+cK(B_{ij}-2R_{ij}^{(w)}),$$

$$(8)\quad \frac{\partial}{\partial t}B_{ij}+B_{kj}\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+B_{ik}\frac{\partial V_j'}{\partial x_k'}+(V_k'-V_k)\frac{\partial}{\partial r_k}B_{ij}-L_{ij}$$
$$=-\frac{1}{\rho}P_{ij}^{(w)}-\frac{1}{\rho_s}P_{ij}^{(v)}+\nu\frac{\partial^2}{\partial r_k^2}B_{ij}+c\left[2(KR_{ij}^{(v)}+\theta R_{ij}^{(w)})-(K+\theta)B_{ij}\right].$$

ここに相関テンソルは次のように定義したものである。

$$R_{ij}^{(v)}=\langle v_iv_j'\rangle,\quad R_{ij}^{(w)}=\langle w_iw_j'\rangle,\quad B_{ij}=\langle v_iw_j'\rangle+\langle w_iv_j'\rangle,$$

$$P_{ij}^{(v)} = \frac{\partial}{\partial r_j}\langle v_i p' \rangle - \frac{\partial}{\partial r_i}\langle p v_j' \rangle \quad , \qquad P_{ij}^{(w)} = \frac{\partial}{\partial r_j}\langle w_i p' \rangle - \frac{\partial}{\partial r_i}\langle p w_j' \rangle ,$$

$$T_{ij}^{(v)} = \frac{\partial}{\partial r_k}(\langle v_i v_k v_j' \rangle - \langle v_i v_j' v_k' \rangle), \quad T_{ij}^{(w)} = \frac{\partial}{\partial r_k}(\langle w_i w_k w_j' \rangle - \langle w_i w_j' w_k' \rangle),$$

$$L_{ij} = \frac{\partial}{\partial r_k}(\langle v_i v_k w_j' \rangle + \langle w_i w_k v_j' \rangle - \langle w_i v_j' v_k' \rangle - \langle v_i w_j' w_k' \rangle) .$$

ここで巾の広い河川の流れを想定して，次のような一様シアー乱流場を考える。

$$V_1 = f(x_3) \ , \ V_2 = V_3 = 0, \quad \partial V_1/\partial x_3 = \mathrm{constant}.$$

この仮定により (6), (7), (8) 式はそれぞれ次のようになる。

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial t} R_{ij}^{(v)} + \left(\delta_{i1} R_{3j}^{(v)} + \delta_{j1} R_{i3}^{(v)} + r_3 \frac{\partial}{\partial r_1} R_{ij}^{(v)}\right) \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - T_{ij}^{(v)}$$
$$= -\frac{1}{\rho} P_{ij}^{(v)} + 2\nu \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} R_{ij}^{(v)} + c\theta (B_{ij} - 2R_{ij}^{(v)}),$$

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial t} R_{ij}^{(w)} + \left(\delta_{i1} R_{3j}^{(w)} + \delta_{j1} R_{i3}^{(w)} + r_3 \frac{\partial}{\partial r_1} R_{ij}^{(w)}\right) \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - T_{ij}^{(w)}$$
$$= -\frac{1}{\rho_s} P_{ij}^{(w)} + c\kappa (B_{ij} - 2R_{ij}^{(w)}),$$

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial t} B_{ij} + \left(\delta_{i1} B_{3j} + \delta_{j1} B_{i3} + r_3 \frac{\partial}{\partial r_1} B_{ij}\right) \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - L_{ij}$$
$$= -\frac{1}{\rho} P_{ij}^{(w)} - \frac{1}{\rho_s} P_{ij}^{(v)} + \nu \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} B_{ij} + c\left[2(\kappa R_{ij}^{(v)} + \theta R_{ij}^{(w)}) - (\kappa+\theta) B_{ij}\right].$$

これらの式は contraction を行なえばさらに簡単化される。

4. スペクトル方程式

見通しをよくするために波数空間 (k) で考えてみる。　そのために次のスペクトル函数を導入する。

$$R_{ij}^{(\,)}(r) = \int \Phi_{ij}^{(\,)}(k) e^{ikr} dk , \quad B_{ij}(r) = \int \psi_{ij}(k) e^{ikr} dk,$$

$$T_{ij}^{(\,)}(r) = \int \Gamma_{ij}^{(\,)}(k) e^{ikr} dk , \quad P_{ij}^{(\,)}(r) = \int \Pi_{ij}^{(\,)}(k) e^{ikr} dk ,$$

$$L_{ij}(r) = \int \Lambda_{ij}(k) e^{ikr} dk .$$

これらを (9), (10), (11) に代入すると次の式がえられる。

(12) $$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{ij}^{(v)} + \left(\delta_{i1}\Phi_{3,j}^{(v)} + \delta_{j1}\Phi_{i,3}^{(v)} - k_1\frac{\partial}{\partial k_3}\Phi_{ij}^{(v)}\right)\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \Gamma_{ij}^{(v)} = -\frac{1}{\rho}\Pi_{ij}^{(v)} - 2\nu k^2\Phi_{ij}^{(v)} + c\theta\left(\psi_{ij} - 2\Phi_{ij}^{(v)}\right),$$

(13) $$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{ij}^{(w)} + \left(\delta_{i1}\Phi_{3,j}^{(w)} + \delta_{j1}\Phi_{i,3}^{(w)} - k_1\frac{\partial}{\partial k_3}\Phi_{ij}^{(w)}\right)\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \Gamma_{ij}^{(w)} = -\frac{1}{\rho_s}\Pi_{ij}^{(w)} + c\kappa\left(\psi_{ij} - 2\Phi_{ij}^{(w)}\right),$$

(14) $$\frac{\partial}{\partial t}\psi_{ij} + \left(\delta_{i1}\psi_{3,j} + \delta_{j1}\psi_{i,3} - k_1\frac{\partial}{\partial k_3}\psi_{ij}\right)\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \Lambda_{ij} = -\frac{1}{\rho}\Pi_{ij}^{(w)} - \frac{1}{\rho_s}\Pi_{ij}^{(v)} - \nu k^2\psi_{ij} + c\left[2\left(\kappa\Phi_{ij}^{(v)} + \theta\Phi_{ij}^{(w)}\right) - (\kappa+\theta)\psi_{ij}\right].$$

ここで定常乱流を考え，さらに contraction を行なえば，非圧縮性から $\Pi_{i,i}^{()} = 0$ となるので，

$$\left(2\Phi_{1,3}^{(v)} - k_1\frac{\partial}{\partial k_3}\Phi_{i,i}^{(v)}\right)\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \Gamma_{i,i}^{(v)} = -2\nu k^2\Phi_{i,i}^{(v)} + c\theta\left(\psi_{i,i} - 2\Phi_{i,i}^{(v)}\right),$$

$$\left(2\Phi_{1,3}^{(w)} - k_1\frac{\partial}{\partial k_3}\Phi_{i,i}^{(w)}\right)\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \Gamma_{i,i}^{(w)} = c\kappa\left(\psi_{i,i} - 2\Phi_{i,i}^{(w)}\right),$$

$$\left(2\psi_{1,3} - k_1\frac{\partial}{\partial k_3}\psi_{i,i}\right)\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \Lambda_{i,i} = -\nu k^2\psi_{i,i} + c\kappa\left(2\Phi_{i,i}^{(v)} - \psi_{i,i}\right),$$

がえられる。　ここでは $\kappa \gg \theta$ を用いた。　水中の土粒子を考えると $\kappa \approx 0.4$ であるから。

5. Epilogue

非等方乱流においても等方性乱流の場合と同様にスペクトル函数を単一のスカラー量，すなわち波数の絶対値 k だけで表わすことができるであろう。

平均流速勾配とスペクトルの関係は，河床に近い領域では Tchen の言う"強い相互作用"を，それ以外の領域では"弱い相互作用"考えて解決できるかもわからない。

水中の土粒子は密度の差が少ないので，水の速度と土粒子の速度の相関はかなり強いものと考えられるから，3重相関 $T_{ij}^{(w)}$ や L_{ij} の省略を行なうことが出来ず，この点がむずかしいところであろう。