

連続曲線箱桁の解析および実験

信州大学 正会員 吉田俊弥

信州大学 学生員 和田三夫

1) まえがき

薄肉曲線箱桁の理論解析は、数多くの人によって論ぜられている。本論文では、これらの中から曲げねじり理論による解法をもちいる。一般的に曲げねじり理論によって解析した場合、断面を箱断面のような閉断面にすれば、その断面に特有な係数 $\lambda = R\sqrt{GJ/EC_w}$ の値が、60以上となり曲げねじりの影響が無視できると考えられているが、1) これは荷重が、せん断中心軸付近に載荷された場合のみであり、曲げとねじりが連成するような偏心荷重の場合には、曲げねじりモーメントが、載荷点付近および曲げモーメントとねじりモーメントが生ずるような支承付近では飛躍的に大きくなることが知られている。これらの付近では、曲げによる応力に比較して、曲げねじりによる、その応力が無視できない場合が考えられる。これは特に箱断面多主桁構造において起り得ることである。

本論文では、特に偏心荷重を考慮して理論解析を進め、また、求められた断面力を利用して、箱桁のフランジとウェブの応力を、せん断おくれをも考慮して解析をした。更にそれに伴って考えられる有初端の問題についても言及し、合せて、単純支持桁および連続S字型箱桁の鋼製モデルを用いて実験を行ない、理論値との比較検討を行なった。特に載荷点付近の応力分布については、曲げねじりの影響を検討した。

2) 理論解析

断面力の理論解析は、図-1のS字連続桁をエネルギー法によって行なう。偏心荷重は、ねじりモーメント T と垂直力 P とに分けて考える。

ひずみエネルギーは次のように表わされる。

$$U = \sum_m \frac{R_m}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{E} \left(\frac{M_y^2}{I} + \frac{M_w^2}{C_w} \right) + \frac{T_s^2}{GJ} \right\} d\varphi \quad (1)$$

上式において、 M_w : 曲げねじりモーメント, C_w : 曲げねじり抵抗, T_s : St. Venant ねじりモーメント。

式中の m は、第 m スパンに関する量を表わす。また、2次ねじりモーメントとせん断力の項は、影響が小さいために省略した。たとえば、上式の M_y, M_w, T_s は、 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ では次のように表わされる。 $\lambda^2 = GJ R^2 / EC_w$, $\eta = 1 / (1 + \lambda^2)$, $\omega = \varphi - \varphi_c$ とおけば、1)

$$M_y = (PR - T) \frac{\sin \omega}{\sin \frac{\omega}{2}} \sin(\varphi) + M_{w(m)} \frac{\sin(\varphi)}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (2-a)$$

$$T_s = -(PR - T)(1 - \eta) \frac{\sin \omega}{\sin \frac{\omega}{2}} \cos(\varphi) + PR \frac{\omega}{2} - \{ PR\eta + T(1 - \eta) \} \frac{\lambda \lambda \omega}{\lambda \lambda \frac{\omega}{2}} \cos(\varphi) + M_{w(m)} \left\{ \frac{1}{\eta} - (1 - \eta) \frac{\cos(\varphi)}{\sin \frac{\omega}{2}} - \eta \lambda \frac{\omega \lambda \cos(\varphi)}{\lambda \lambda \frac{\omega}{2}} \right\} + M_{w(m)} \left(\frac{1}{\omega R} - \frac{\lambda}{R} \frac{\omega \lambda \cos(\varphi)}{\lambda \lambda \frac{\omega}{2}} \right) \quad (2-b)$$

$$M_w = R \left\{ \frac{T + (PR - T)}{\lambda} \frac{\lambda \lambda \omega}{\lambda \lambda \frac{\omega}{2}} \sin(\varphi) + (T - PR)\eta \frac{\sin \omega}{\sin \frac{\omega}{2}} \sin(\varphi) \right\} - R\eta M_{y(m)} \left(\frac{\sin(\varphi)}{\sin \frac{\omega}{2}} - \frac{\lambda \lambda \cos(\varphi)}{\lambda \lambda \frac{\omega}{2}} \right) + M_{w(m)} \frac{\lambda \lambda \cos(\varphi)}{\lambda \lambda \frac{\omega}{2}} \quad (2-c)$$

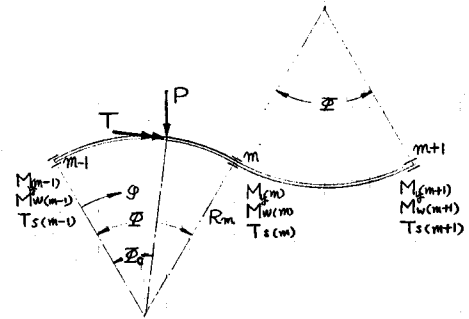


図-1 解析モデル

$M_{y(m)}, M_{w(m)}$ を求めるために、曲線析の全長に最小仕事の原理をもちいる。

$$\frac{\partial U}{\partial M_{y(m)}} = \sum_{i=m-1}^{m+1} \int_0^{2b} \left\{ \frac{M_{yi}}{EI} \frac{\partial M_{yi}}{\partial M_{y(m)}} + \frac{M_{wi}}{EC_w} \frac{\partial M_{wi}}{\partial M_{y(m)}} + \frac{T_{si}}{GJ} \frac{\partial T_{si}}{\partial M_{y(m)}} \right\} d\varphi = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial M_{w(m)}} = 0 \quad (3)$$

と表われ、上式の $M_{y(m)}, M_{w(m)}$ からそれぞれのスパンにおける断面力を決定する。

次に求められた各断面力を利用して反力を求めるにあたり、断面は薄肉断面であることから、せん断おくれの影響を考慮してフランジの直応力を求めてみる。解析方法は、軸方向変位を仮定して基礎微分方程式を導き、それを変分法によって解く方法であり、近似

解となる。2) 断面は図-2に示す。

軸方向変位 $U_i (i=1 \sim 4)$ は、たとえば次のように表される。

$$U_3 = U_0(\varphi) + \rho_1 \psi_1(\varphi) + \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) f_3(\varphi) + y_0 \psi_2(\varphi) \quad (4)$$

$U_0(\varphi)$: 棒理論による軸方向変位

$f_3(\varphi)$: せん断おくれによって生ずる軸方向変位

$\psi_1(\varphi), \psi_2(\varphi)$: それぞれ y および z 軸まわりのねじり角

これにより上フランジの直応力は次のように表される。

$$\sigma_3 = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{R}{\rho} \left\{ \frac{dU_0(\varphi)}{R d\varphi} + \rho_1 \frac{d\psi_1(\varphi)}{R d\varphi} + \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \frac{df_3(\varphi)}{R d\varphi} + y_0 \frac{d\psi_2(\varphi)}{R d\varphi} \right\}, \quad (\rho \text{ はフランジ上の任意点の曲率半径}) \quad (5)$$

また、つり合い式より求められる基礎微分方程式は、フランジ、ウェブ、その結合点についてそれぞれ求められる。たとえば、上フランジについての式は、次のように表される。

$$\frac{R}{\rho} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{d^2 U_3}{R^2 d\varphi^2} + G \frac{\rho}{R} \frac{d^2 U_3}{d\rho^2} + 2 \frac{G}{R} \frac{dU_3}{d\varphi} = 0 \quad (6)$$

上式を含めた、八つの基礎式を利用して、 f_3, f_4 を求めるために変分法を適用すると、次のような連立微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 f_3(\varphi)}{d\varphi^2} + \mu_1 \frac{d^2 f_3(\varphi)}{d\varphi^2} - \alpha_1^2 f_3(\varphi) = \gamma_1 \frac{dM_y}{d\varphi}, \quad \frac{d^2 f_4(\varphi)}{d\varphi^2} + \mu_2 \frac{d^2 f_4(\varphi)}{d\varphi^2} - \alpha_2^2 f_4(\varphi) = \gamma_2 \frac{dM_y}{d\varphi} \quad (7)$$

(上式において、 $\mu_1, \mu_2, \gamma_1, \gamma_2, \alpha_1^2, \alpha_2^2$ の値は、ここには記載を省略する。)

(7) 式を解くことによって、 $f_{3,4} (i=3,4)$ が求められ、それによって析の横方向の直応力分布が求められる。たとえば、集中荷重 P が働いた場合は、次のように表される。

$0 \leq \varphi \leq \pi$

$$f_3 = \left\{ \frac{\sinh \beta_1 w}{\sinh \beta_1 \pi} \frac{(a\pi - c)}{(m-n)} \cosh \beta_1(\varphi) - \frac{\sinh \beta_2 w}{\sinh \beta_2 \pi} \frac{(a\pi - c)}{(m-n)} \cosh \beta_2(\varphi) + a \frac{\sin w}{\sin \pi} \cos(\varphi) \right\} P R \quad (8)$$

また、端モーメント M が作用する場合には、次のように求めることができる。

$$f_3 = A_1 \sinh \beta_1(\varphi) + A_2 \cosh \beta_1(\varphi) + A_3 \sinh \beta_2(\varphi) + A_4 \cosh \beta_2(\varphi) + a \frac{M}{\sin \pi} \cos(\varphi) \quad (9)$$

(8), (9) 式中の、 $\beta_1, \beta_2, a, c, m, n$ は、ここには記載を省略する。

(9) 式における、 A_1, A_2, A_3, A_4 は次式から求めることができる。

$$A = K^{-1} M \quad (10)$$

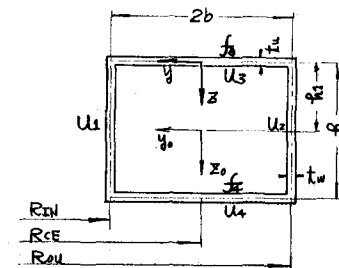


図-2

(10) 式の A, K, M , は次のように表わされる。

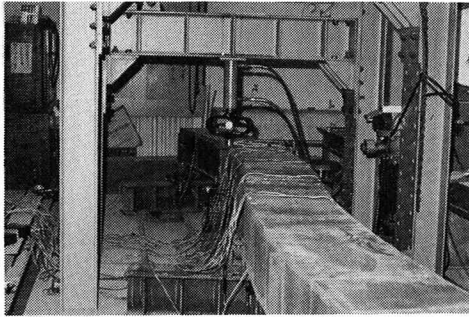
$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 \\ n\beta_1 \pm \omega\beta_2 & n\beta_2 \pm \omega\beta_1 & n\beta_1 \pm \omega\beta_2 & n\beta_2 \pm \omega\beta_1 \\ m\beta_1 & 0 & n\beta_2 & 0 \\ mn\beta_1 \pm m\omega\beta_2 & mn\beta_2 \pm n\omega\beta_1 & mn\beta_1 \pm m\omega\beta_2 & mn\beta_2 \pm n\omega\beta_1 \end{bmatrix}, \quad M = - \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \cos \pm M, \quad (11)$$

(5) ~ (11) から求められたフランジの直応力分布から有効幅が求められる。有効幅を b_m で表せば、

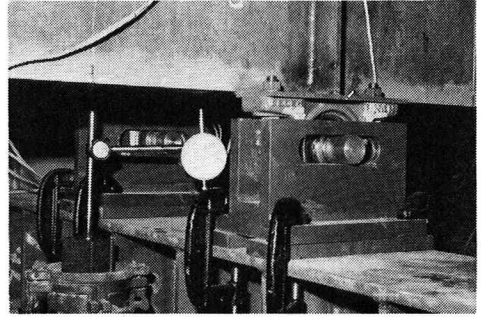
$$b_m = \sum_{i=1}^2 \frac{\int_0^{b_i} \sigma_{ui} dy}{S_i} \quad \left(S_i \text{ はフランジ応力の中央と端と結ぶ直線で囲まれた台形の面積を表わし、} i=1, 2 \text{ は内端, 外端を示す。} \right)$$

3) 模型実験

実験モデルとして、次に示すような断面および長さの鋼製箱断面桁を用いた。図-1, 2 の記号を用いて表わすと、
 $R=30.0 \text{ cm}, b=20.0 \text{ cm}, t_u=t_w=0.6 \text{ cm}, R=800.0 \text{ cm}, \pm=0.4 \text{ radian}$
 各支点にダイヤフラムを、載荷点(中央点)にはスケフナーを配置し、また支点にはローブローックを用いた。載荷点は、 $R=820.0 \text{ cm}, 780.0 \text{ cm}$ であり、写真は $R=780.0 \text{ cm}$ を示す。



連続桁載荷状況



ローラー支座

4) 実験結果と理論値の比較および考察

モデルの断面定数、断面力は次のように表わされる。 M_y, M_w は載荷点の値を示す。

$$I_y = 1.44 \times 10^4 \text{ cm}^4, \quad I_z = 2.22 \times 10^4 \text{ cm}^4, \quad C_w = 5.42 \times 10^4 \text{ cm}^6,$$

$$J = 2.60 \times 10^4 \text{ cm}^4, \quad \lambda = R \sqrt{GJ/EC_w} = 344,$$

$$q = 0.5 \text{ 断面}: \quad M_y = 6.66 \times 10^5 \text{ kg cm}, \quad M_w = -3.58 \times 10^5 \text{ kg cm}^2, \\ \frac{df_y}{dq} = \frac{df_z}{dq} = 2.52 \times 10^{-4} \text{ cm},$$

上式の載荷点は、 $R=820.0 \text{ cm}$ であり、断面定数を用いて解析した理論値と、実験値と、次ページの図-3, 4 に示す。これは箱桁の上部フランジの応力分布を示す。同図から載荷断面において、載荷点と反対側、 $IN \sim IN'$ では、引張応力が見られる。これは、載荷断面にスケフナーだけで、ダイヤフラムを配置しなかったために断面に変化が生じ、曲げ応じれ応力が曲げ応力を越えて、局部的ではあるが引張応力を生じさせたものと考えられる。一般的な曲げ理論によって得られる直線分布の応力は図が繁雑になるために本文では省略したが、載荷断面だけ数値的に示すと、 $IN \sim IN'$: -71.2 kg/cm^2 , $CE \sim CE'$: -69.4 kg/cm^2 , $OU \sim OU'$: -67.7 kg/cm^2 である。仮に曲げ応じりを考慮しなかった場合、一般構理論による理論値は、実際の応力と比較して、半分以下であり、これを用いて設計すると非常

に危険であることが、図-3, 4から理解できる。

薄肉閉断面における、曲げねじりの影響は、曲げモーメント、ねじりモーメント、せん断力、など断面力と力かたわみには、その影響は大きくなく無視できる。しかし応力について考えると、曲げ応力よりも大きな値を持つことが、この実験によって実際に理解できる。また図-4からせん断力のかたわみの影響も、曲げねじり同様、載荷点付近では、考慮すべきであることが理解できる。

連続桁の内端載荷の場合、単純桁の内端、外端載荷の場合、それらの理論値、実験値は当日スライドで発表する。

タイヤフレームを載荷点に配置しなかったために、断面変化的影響が実験値に生じたと前述したが、内変形を考慮した論文(3)を用いて応力の比較を行なってみたと思っている。また本論文では、単一箱桁の場合のみを取り扱ったが、箱断面多主桁構造にも拡張して、その影響を考慮してみたことを考えている。

参考文献

- 1) 渡辺 昇 : 曲線桁の理論と計算
- 2) 小松定夫・他 : 曲線桁の shear lag と有効幅に関する研究 土木学会論文集 Ⅷ191号
- 3) 能町純雄・他 : 断面変形を考慮した曲線箱桁の応力解析 土木学会論文集 Ⅷ187号

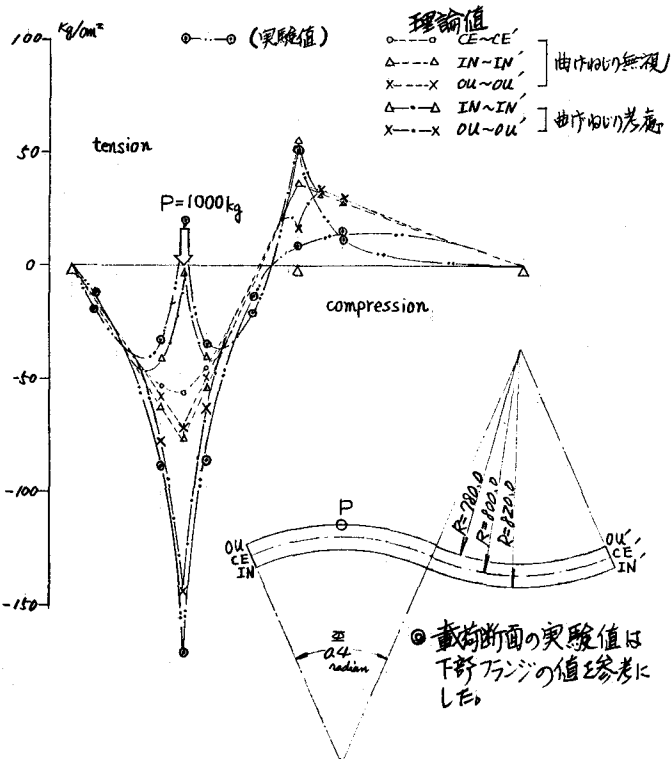


図-3 上部フランジの軸方向応力分布(外端載荷)

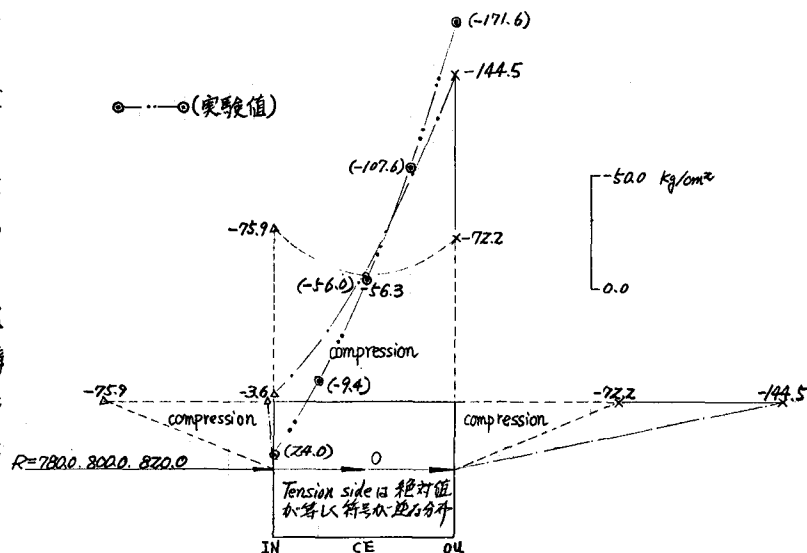


図-4 載荷断面の応力分布