梁の動的一般式の誘導に関する一考察

早稲田大学　正員　平嶋 政治
早稲田大学　学生員　○依田 照彦

1. 緒言

従来，梁に関する一般式は異なる思考様式を理論展開の基礎として解析され，その理論の正当性を実験により検定するという手順で誘導されて来た。ここでは剛体力学の概念を解析方法の出発点とし弾性的挙動を考慮すべく剛体力学系の自由度を拡大解釈し，変位成分を決定した後，変位・変形ともに微少であると云う線型弾性論の仮定の下に，微少部分に於けるエネルギー表示式を導入し，ハミルトンの力学原理を用いて，一般的な梁に関する動力学的な一般式を形式的に誘導した。

2. 理論式の誘導

梁を軸方向 z = 一定と $z+dz$ = 一定の間で切断して考え，薄片微少要素の横断面内のある点の全変位ベクトル $\mathbf{q}$ を剛体力学の概念を用いて

$$\mathbf{q} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\Theta} \times \mathbf{r} \tag{1}$$

と表わすことにする。ここに $\mathbf{u}$ はせん断中心の変位 u，v，w にねじれ角 θ による補正を加えたベクトルであり，$\boldsymbol{\Theta}$ は回転を特徴ずけるベクトル，$\mathbf{r}$ は断面内の図心を中心とする位置ベクトルである。只今の場合には u，v，w はそれぞれ座標軸 x，y，z 上への射影成分で，u，v，w，θ は z のみの函数としておく。

今，移動と回転によって特徴ずけられる剛体運動の仮定に加えて，弾性体の仮定である変形を考慮することにより，図心とねじり中心が異なる一般的な梁の変位状態を次の様にベクトル表示する。

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k}, \\ \mathbf{u} &= (u + a_y\theta)\mathbf{i} + (v - a_x\theta)\mathbf{j} + (w - \varphi\theta')\mathbf{k}, \\ \boldsymbol{\Theta} &= -v'\mathbf{i} + u'\mathbf{j} + \theta\mathbf{k}, \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{2}$$

但し，$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ はそれぞれ x，y，z 方向の単位ベクトルであり，$'$ は z による微分を意味し，(a_x, a_y) は図心を原点としたときのせん断中心点の座標，$\varphi(x, y)$ は一般的なそり函数を意味する。

(2)を(1)に代入すると全変位成分として

$$\begin{aligned} U &= u - (y - a_y)\theta, \\ V &= v + (x - a_x)\theta, \\ W &= w - u'x - v'y - \theta'\varphi \end{aligned} \tag{3}$$

を得る。

付言するならば，この変位成分の決定が以下の形式的展開に於いて本質的な役割を果す。又現実との比較に於いて有効である限り変位状態の記述はここに掲げた形に止まらない。

変位成分が決定されたので，線型弾性論より歪成分は直ちに

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\varepsilon_y=\gamma_{xy}=0\,,\\
&\varepsilon_z=w'-u''x-v''y-\theta''\varphi,\\
&\gamma_{xz}=[-\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}-(y-a_y)]\theta',\\
&\gamma_{yz}=[-\tfrac{\partial\varphi}{\partial y}+(x-a_x)]\theta'
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

と計算できる。

さらに一般化された弾性法則より，応力成分

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(w'-u''x-v''y-\theta''\varphi),\\
&\sigma_y=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(w'-u''x-v''y-\theta''\varphi),\\
&\sigma_z=\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(w'-u''x-v''y-\theta''\varphi),\\
&\tau_{xy}=0\,,\\
&\tau_{xz}=G[-\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}-(y-a_y)]\theta',\\
&\tau_{yz}=G[-\tfrac{\partial\varphi}{\partial y}+(x-a_x)]\theta'
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

を得る。ここに ν はポアソン比である。

ここで，新たに外力の作用による軸方向応力 σ_z^* とせん断応力 τ_{xz}^*，τ_{yz}^* を考えることにする。それらは仮想仕事の原理により外力と次の様に関係ずけられる。

$$
\begin{aligned}
&P=-\int_A\sigma_z^*\cdot 1\,dA\,,\\
&M_x=\int_A\sigma_z^*y\,dA\,,\qquad M_y=\int_A\sigma_z^*x\,dA,\\
&M_\varphi=\int_A\sigma_z^*\varphi\,dA,\\
&M_t=\int_A\{\tau_{yz}^*(x-a_x)-\tau_{xz}^*(y-a_y)\}\,dA\,.
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

簡単のために，1，x，y，φ は次の直交条件を満すものとする。

$$
\begin{aligned}
&\int_A 1\cdot x\,dA=0\,, &&\int_A 1\cdot\varphi\,dA=0,\\
&\int_A 1\cdot y\,dA=0, &&\int_A x\cdot\varphi\,dA=0,\\
&\int_A x\cdot y\,dA=0, &&\int_A y\cdot\varphi\,dA=0\,.
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

(5)式の σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} を σ_z^*, τ_{xz}^*, τ_{yz}^* で置換え(6)に代入し，直交条件を用いると，

$$
\begin{aligned}
&P=-EAw'\\
&M_x=-EJ_xv'',\qquad M_y=EJ_yu'',\\
&M_\varphi=-EJ_\varphi\theta'',\\
&M_t=GJ_d\theta'
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

を得る。但し，E は換算ヤング係数であり，$E\fallingdotseq\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ とみなせるものとする。さらに，A, J_x, J_y, J_φ, J_d は次の様な簡略化された記号としての意味を有している。即ち，

$$
A=\int_A dA,
$$

$$
\begin{aligned}
&J_x=\int_A y^2 dA, \qquad J_y=\int_A x^2 dA, \\
&J_\varphi=\int_A \varphi^2 dA, \\
&J_d=\int_A\left\{\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(x-a_x)\right](x-a_x)-\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-(y-a_y)\right](y-a_y)\right\} dA.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

従って，外力に対応する応力を外力によって表現すれば，次の様になる。

$$
\begin{aligned}
&\sigma_z^*=-\frac{P}{A}+\frac{M_x}{J_x}y-\frac{M_y}{J_y}x+\frac{M_\varphi}{J_\varphi}\varphi, \\
&\tau_{xz}^*=\frac{M_t}{J_d}\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-(y-a_y)\right], \\
&\tau_{yz}^*=\frac{M_t}{J_d}\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(x-a_x)\right].
\end{aligned}
\tag{10}
$$

以上の準備の下に，変分原理を用いて，梁の動的な一般式を求めることにする。一般化されたポテンシャルエネルギーが存在しているとき，ハミルトン原理は

$$
\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt+\delta\int_{t_0}^{t_1} W^* dt=0 \tag{11}
$$

と書かれる。ここに於いて，Lはラグランジアン $L=T^*-V^*$ で，T^*, V^*はそれぞれ運動エネルギー，内力のポテンシャルエネルギーを意味する。又W^*は外力のポテンシャルエネルギーである。

まず最初に，運動エネルギーT^*を変位ベクトル$\mathbf{q}$を用いて

$$
T^*=\frac{1}{2}m\int_0^l\int_A \dot{\mathbf{q}}\cdot\dot{\mathbf{q}}\,dA\,dz \tag{12}
$$

と表わすことにする。ここにmは質量密度，lは支間長，˙は時間tによる微分を示し，$\mathbf{q}$は(2)，(3)よりu，v，w，θを含む式で表わせる。

又内力のポテンシャルエネルギーV^*は

$$
V^*=\frac{1}{2}\int_0^l\int_A\left\{\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xz}\gamma_{xz}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{xy}\gamma_{xy}\right\} dA\,dz \tag{13}
$$

と書け，u，v，w，θの函数として表わすことができる。（(4)，(5)を用いることにより）

さらに，外力によるポテンシャルエネルギーW^*を微少要素に作用する応力の概念と結びつけて，

$$
W^*=\int_0^l\int_A\left\{\frac{1}{2}\sigma_z^*\left(U'^2+V'^2\right)+\sigma_z^* W'+\tau_{xz}^* U'+\tau_{yz}^* V'\right\} dA\,dz \tag{14}
$$

と書くことができれば，この式も(3)と(10)を用いてu，v，w，θの函数として表わせる。

それ故，これらのT^*，V^*，W^*を(11)に代入し，w，u，v，θについて変分をとると，以下に示すような微分方程式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\text{i)}\ mA\ddot{w}-EAw''+P'=0, \\
&\text{ii)}\ -mJ_y\ddot{u}''+mA\ddot{u}+ma_yA\ddot{\theta}+EJ_yu^{iv}+(Pu')'+\left[(M_x+a_yP)\theta'\right]'+M_y''+\frac{M_t'}{J_d}(D_x-a_yA)=0, \\
&\text{iii)}\ -mJ_x\ddot{v}''+mA\ddot{v}-ma_xA\ddot{\theta}+EJ_xv^{iv}+(Pv')'+\left[(M_y-a_xP)\theta'\right]'-M_x''+\frac{M_t'}{J_d}(D_y+a_xA)=0,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

iv) $-mJ_\varphi\ddot{\theta}''+ma_yA\ddot{u}-ma_xA\ddot{v}+mr^2A\ddot{\theta}+EJ_\varphi\theta^{iv}-GJ_d\theta''$

$$+[(M_x+a_yP)u']'+[(M_y-a_xP)v']'+[(r^2P+2\beta_xM_y-2\beta_yM_x-2\beta_\varphi M_\varphi)\theta']'-M_\varphi''-M_t'=0.$$

但し，考察断面の特性量は次のように書かれる。

$$
\begin{aligned}
&r^2=\frac{J_x+J_y}{A}+a_x^2+a_y^2,\\
&\beta_x=\frac{\alpha_y}{2J_y}-a_x \quad ; \quad \alpha_y=\int_A x(x^2+y^2)\,dA,\\
&\beta_y=\frac{\alpha_x}{2J_x}-a_y \quad ; \quad \alpha_x=\int_A y(x^2+y^2)\,dA,\\
&\beta_\varphi=\frac{\alpha_\varphi}{2J_\varphi} \quad ; \quad \alpha_\varphi=\int_A \varphi(x^2+y^2)\,dA,\\
&D_x=\int_A\frac{\partial\varphi}{\partial x}dA, \quad D_y=\int_A\frac{\partial\varphi}{\partial y}dA.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

これらの微分方程式は，梁の動的な安定問題に対する微分方程式として利用できるように意図したものである。それ故，自然境界条件と初期条件を適当に与えれば，変数分離法等を使用して u，v，w，θ についての一般解を求めることができる。さらに得られた u，v，w，θ を用いると軸方向応力とせん断応力を定めること，あるいは限界状態を決定することが可能になる。その上(15)の微分方程式は，梁が剛な変形しない横断面を持つ限り，開断面部材でも閉断面部材についても有効である。例えば，扇形そり法則を用いる開断面梁の理論の場合には，そり函数 φ を扇形面積 ω で置き換え，ねじり剛性 J_d をサンブナンのねじり理論による値とすればよい。又閉断面梁の場合には，扇形面積 ω の代りにそり函数 $\varphi=xy$ を用い，ねじり剛性 J_d を純ねじり理論に従う，ブレットの方程式から求めればよい。

3. 結語

土木構造物に対象を限定するならば，梁が構造様式として最も一般的であることに鑑み，梁の動的な一般式を，これまでの複雑な展開に比して　単純かつ分り易い形で誘導できればという意向の下に，まず第一段階として，剛体力学という理想化された理論を基礎に，弾性力学の仮定を考慮し，従来の理論展開と矛盾なきよう検討しつつ，空間内の変位成分を幾何学的に決定した。さらに第二段階として，この得られた変位成分を用いて，運動エネルギー，内力のポテンシャルエネルギー，外力のポテンシャルエネルギーを微少部分について考察し，これらのエネルギーを同様な思考方法の下に表示し，変分原理により梁の動的な微分方程式を求めた。この第二段階に於いては，外力のポテンシャルエネルギーを内力のポテンシャルエネルギーと類似させて表現した点に特徴がある。最后に，結果として得られた微分方程式が従来の理論によるものと矛盾していないことを確めてみた。勿論，この事から直ちにここで行った形式的な誘導方法が正しいと結論できないが，少なくとも今後の一般化に際して何らかの示唆を与えることができればと愚考する次第である。

参考文献

V.Z.ウラソフ：薄肉弾性ばりの理論，技報堂，１９６７年．（奥村敏恵外共訳）