半楕円切欠きを有する2次元弾性体の応力解析
── 準等方性の場合 ──

名古屋工業大学　正員　　長谷部　宣男

まえがき　直交異方性2次元弾性体の異方性の主軸と座標軸x，yが一致するとき，基礎微分方程式は，Airyの応力関数を$F(x,y)$とすると

$$\frac{1}{E_Y}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+\left(\frac{1}{G_{xY}}-\frac{2\nu_x}{E_x}\right)\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{1}{E_x}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0 \qquad (1)$$

で表わされる。ここにE_x，E_Yは，それぞれx，y軸方向縦弾性定数，ν_x，ν_Yは，それぞれx，y方向ポアソン比，G_{xY}はせん断弾性定数である。また以上の弾性定数の間には$\nu_x/E_x=\nu_Y/E_Y$の関係がある。これらの弾性定数の間に特別な関係，すなわち$G_{xY}=\sqrt{E_xE_Y}/\{2(1+\sqrt{\nu_x\nu_Y})\}$が成り立つときには，$k=\sqrt[4]{E_x/E_Y}$とおくと式（1）の微分方程式は$\left(k^2\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2\right)^2F=0$と変形される。さらに

$$x_1=x,\qquad y_1=ky \qquad (2)$$

なるアフィン変換を行なうと$\left(\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial y_1^2\right)^2F=0$となり，応力関数$F$は$x_1$，$y_1$を引数とする重調和関数であることがわかる。従ってその解法は，等方性の場合に準ずるものとなる。ここではこのような弾性体を準等方性と呼んでいる。

解　法　解法の概略を述べる。$z_1=x_1+iy_1$なる複素変数を考え，z_1の正則な複素関数を$\varphi_1(z_1)$，$\chi_1(z_1)$とすると応力関数Fは　$F=R_e[\bar{z}_1\varphi_1(z_1)+\chi_1(z_1)]$，境界条件式は

$$\varphi_1(z_1)+z_1\overline{\varphi_1'(z_1)}+\overline{\psi_1(z_1)}=\partial F/\partial x_1+i\,\partial F/\partial y_1$$
$$=\partial F/\partial x+\frac{i}{k}\cdot\partial F/\partial y=-\int Y_n ds+\frac{i}{k}\cdot\int X_n ds$$

となる。ここに$d\chi_1(z_1)/dz_1=\psi_1(z_1)$である。

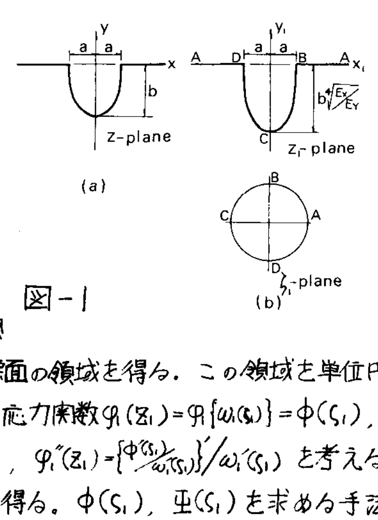
次に応力の表示式を示す。x_1，y_1座標面上の応力成分にサフィクス1をつけて

$$\sigma_{x_1}+\sigma_{y_1}=2[\varphi_1'(z_1)+\overline{\varphi_1'(z_1)}]$$
$$\sigma_{y_1}-\sigma_{x_1}+2i\tau_{x_1y_1}=2[\bar{z}_1\varphi_1''(z_1)+\psi_1'(z_1)]$$

となる。実際の応力成分と上式の応力成分との関係は

$$\sigma_x=\partial^2F/\partial y^2=k^2\sigma_{x_1},\quad \sigma_y=\sigma_{y_1},\quad \tau_{xy}=-\partial^2F/\partial x\partial y=k\tau_{x_1y_1}$$

である。



図−1

次に写像関数を用いた解析を示す。図−1（a）に示す物理領域に式（2）のアフィン変換を行なうと（b）に示すx_1，y_1座標面の領域を得る。この領域を単位円内部に等角写像する関数$z_1=x_1+iy_1=\omega_1(\zeta_1)$を考える。これより応力関数$\varphi_1(z_1)=\varphi_1\{\omega_1(\zeta_1)\}=\phi(\zeta_1)$，$\psi_1(z_1)=\Psi(\zeta_1)$とおき，$\varphi_1'(z_1)=\phi'(\zeta_1)/\omega_1'(\zeta_1)$，$\psi'(z_1)=\Psi'(\zeta_1)/\omega_1'(\zeta_1)$，$\varphi_1''(z_1)=\{\phi'(\zeta_1)/\omega_1'(\zeta_1)\}'/\omega_1'(\zeta_1)$を考えると，写像関数$z_1=\omega_1(\zeta_1)$を用いた境界条件式および応力表示式を得る。$\phi(\zeta_1)$，$\Psi(\zeta_1)$を求める手法は等方性の場合と全く同じである。また応力のx，y方向成分σ_x，σ_y，τ_{xy}を直交曲線座標応力成分σ_r，σ_θ，$\tau_{r\theta}$に変換するには　$\sigma_r+\sigma_\theta=\sigma_x+\sigma_y$，$\sigma_\theta-\sigma_r+2i\tau_{r\theta}=e^{2i\alpha}(\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy})$を用いればよい。ここに$e^{2i\alpha}=\{(1+k)\omega_1'\zeta_1+(1-k)\overline{\omega_1'\zeta_1}\}^2/\{(\omega_1'\zeta_1+\overline{\omega_1'\zeta_1})^2-k^2(\omega_1'\zeta_1-\overline{\omega_1'\zeta_1})^2\}$である。

計算例　半楕円切欠きを有する半無限板を等方性弾性体の平面問題および薄板の面外曲げの問題として写像関数を用いた応力解析は文献1）に示した。

文献1）に用いた写像関数と同様にして $z=\omega_1(\zeta_1)$ の写像関数を作り，半無限の直線縁と，弾性主軸とが平行な場合の応力解析を示す。図-2，3，4は，一様な引張り力1.0の作用した場合の応力分布の一例である。

図-2は，楕円の横軸と縦軸の比が1：0.4の半楕円切欠きの境界線上および対称軸上の応力分布を $k=\sqrt[4]{E_x/E_Y}=0.5$，1.0（等方性），2.0の場合について示したものである。kの値によってかなり応力分布に違いの生ずることがわかる。特に $k=0.5$ の場合の最大応力は切欠き底に生じなく，突起部分に近いところに生じていることが注目に値する。突起部付近には小さな圧縮応力が生じている。

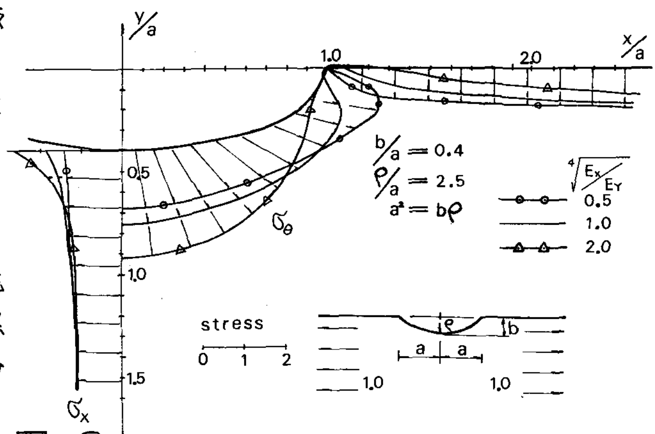


図-2

図-3は，半円切欠きの場合を示す。$k=0.5$ のときは，最大応力は切欠き底でなく別の周辺上に移動していること，$k=2.0$ のときの最大応力はかなり大きく，円弧周辺上の圧縮応力の生じるヶ所が広がっていることなどがわかる。

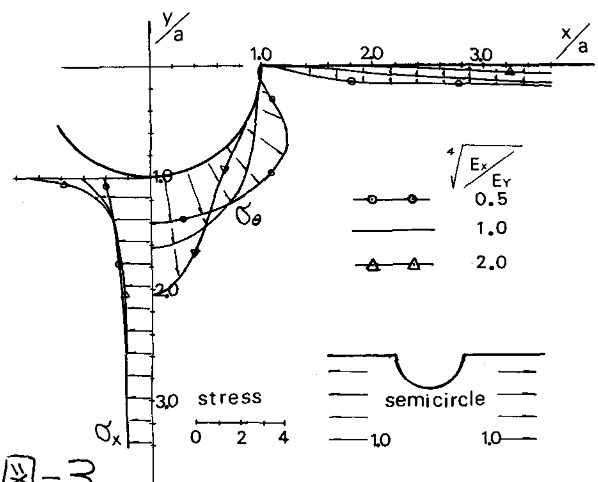


図-3

図-4には，縦軸と横軸の比が2：1の半楕円切欠きの場合を示す。応力分布の特性としては，図-2，3の考察と同じようなことが言える。

異方性の主軸と半無限の直線縁が傾いている場合の解析も考え方は同じであるが，アフィン変換して得られる Z_1 平面の領域が対称でなくなるので写像関数の作成は煩雑になる。

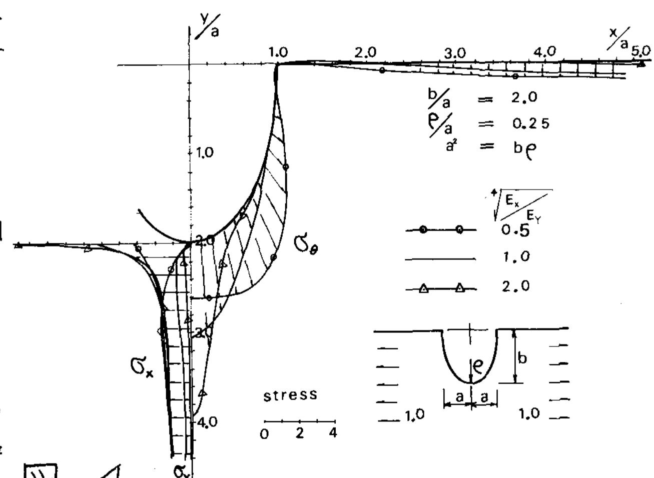


図-4

文献1）長谷部：名古屋工業大学学報 24 昭和47年