

名城大学理工学部土木工学教室 正会員 柴田道生

1. 緒言

杭の支持力を求める理論の展開は、殆んど先端扁平な円形断面に就いて論述されているが、一般に使用されている杭は、其の先端部は總て円錐形である。筆者は実験より、この円錐形先端角度が、支持力の数値に著しく影響することを確認している。杭が地盤に貫入すれば、杭周の地盤は締め固められ、破壊領域も形成する。この破壊領域は杭径の函数で表はされる。杭の支持力は、破壊領域の觀念より計算できる筈である。そこで筆者は、先端支持力を次のように計算してみた。

2. 破壊領域の觀念を採り入れた先端支持力の理論解

先ず破壊領域を求めるため、次の釣合微分方程式より出発する。即ち σ_r : 半径方向の水平垂直応力 σ_z : 鉛直方向の垂直応力 σ_θ : 円周方向の水平垂直応力 γ : 土の単位重量 τ : r, z 面の剪断応力、とすると、(図-1)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad \dots\dots\dots (1) \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} = \gamma \quad \dots\dots\dots (2)$$

塑性状態にある未知応力 σ_r, σ_z, τ の代りに $\sigma_1, \sigma_2, \alpha$ (主応力 σ_1 と r 軸とが α 角) と用いると (図-2)

$$\sigma_r = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad \sigma_z = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_1, \sigma_2 \text{ は Mohr 円より } \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \text{ と用いると } \sigma_1 = (1 + \sin \varphi) \sigma_m + C \cot \varphi \quad \sigma_2 = (1 - \sin \varphi) \sigma_m - C \cot \varphi$$

但し、 C : 粘着力 φ : 土の内摩擦角 従つて、粘着力を零とすると、 $\sigma_r = \sigma_m (1 + \sin \varphi \cos 2\alpha)$

$$\sigma_z = \sigma_m (1 - \sin \varphi \cos 2\alpha) \quad \tau = \sigma_m \sin \varphi \sin 2\alpha \quad \text{又主応力 } \sigma_1 \text{ と } z \text{ 軸とが } \delta \text{ とすると (図-1)}$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \therefore \text{この関係を用いると } \sigma_r = \sigma_m (1 - \sin \varphi \cos 2\delta) \quad \sigma_z = \sigma_m (1 + \sin \varphi \cos 2\delta)$$

$$\tau = \sigma_m \sin \varphi \sin 2\delta \quad \text{次に } \delta \text{ は } r, z \text{ 軸の函数であるから } \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_m}{\partial r} (1 - \sin \varphi \cos 2\delta) + 2\sigma_m \sin \varphi \sin 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 2\sigma_m \sin \varphi \cos 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial z} + \sin \varphi \sin 2\delta \frac{\partial \sigma_m}{\partial z} \quad \text{K. Terzaghi により } \sigma_\theta = \sigma_m (1 + \sin \varphi)$$

$$\text{従つて } \sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_m (1 - \sin \varphi \cos 2\delta) - \sigma_m (1 + \sin \varphi) \quad \therefore \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \frac{\sigma_m}{r} (-\sin \varphi \cos 2\delta - \sin \varphi)$$

(1) 式に代入して、

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial r} (1 - \sin \varphi \cos 2\delta) + 2\sigma_m \sin \varphi \sin 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial r} + 2\sigma_m \sin \varphi \cos 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial z} + \sin \varphi \sin 2\delta \frac{\partial \sigma_m}{\partial z} + \frac{\sigma_m}{r} (-\sin \varphi \cos 2\delta - \sin \varphi) = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{次に } \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -2\sigma_m \sin \varphi \sin 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial z} + (1 + \sin \varphi \cos 2\delta) \frac{\partial \sigma_m}{\partial z} \quad \text{又 } \frac{\partial \tau}{\partial r} = 2\sigma_m \sin \varphi \cos 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial r} + \sin \varphi \sin 2\delta \frac{\partial \sigma_m}{\partial r}$$

(2) 式に代入して、

$$2\sigma_m \sin \varphi \sin 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial z} + (1 + \sin \varphi \cos 2\delta) \frac{\partial \sigma_m}{\partial z} - 2\sigma_m \sin \varphi \cos 2\delta \frac{\partial \delta}{\partial r} + \sin \varphi \sin 2\delta \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\sigma_m}{r} \sin \varphi \sin 2\delta = \gamma \quad \dots\dots\dots (4)$$

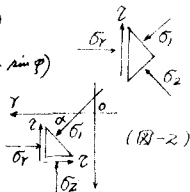
さて、主応力 σ_1 と r 軸とが δ 角、 $\delta = \frac{\pi}{2}$ の解は存在するから、(3) 式、(4) 式に代入して

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial r} = 0 \quad (1 - \sin \varphi) \frac{\partial \sigma_m}{\partial z} = \gamma \quad \text{積分して } (1 - \sin \varphi) \sigma_m = \gamma z + A \quad \text{但し } A \text{ は積分常数で、地表面}$$

では、 $z=0, \sigma_m=0$ の条件を入ると $A=0$ 従つて $\sigma_m = \frac{\gamma z}{1 - \sin \varphi}$ この関係を用いると上述

$$\text{の } \sigma_r, \sigma_z, \tau \text{ は } \sigma_r = \frac{\gamma z}{1 - \sin \varphi} (1 - \sin \varphi \cos 2\delta) \quad \sigma_z = \frac{\gamma z}{1 - \sin \varphi} (1 + \sin \varphi \cos 2\delta) \quad \tau = \frac{\gamma z}{1 - \sin \varphi} \sin \varphi \sin 2\delta$$

$$\text{と第(1)式に } \delta = \frac{\pi}{2} \text{ を代入すると } \sigma_r = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \gamma z \quad \dots\dots\dots (5) \quad \sigma_z = \gamma z, \quad \tau = 0$$



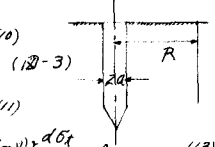
さて、杭を貫入することによって、杭周囲地盤の締固範囲、即ち破壊領域の境界を \$R\$ とすると、この境界
(図-3)
での地盤応力 \$\sigma_R\$ は \$K_m\$ と静止土圧係数とすると \$\sigma_R = K_m \gamma Z\$ (8) で表はされる。

第4図において、注意の半径 \$r\$ の真に生ずる円周応力 \$\sigma_t\$、半径方向応力 \$\sigma_r\$ とすると

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{r} = 0 \quad (7) \text{ 次に、半径方向変位を } u, \text{ 半径方向歪を } \epsilon_r, \text{ 円周方向歪を } \epsilon_t, \text{ 軸応力を } \sigma_z \text{ とすると、}$$

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E} \{ \sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z) \} \quad (9) \text{ 但し } \nu: \text{土のポアソン比, } E: \text{土の弾性係数,}$$

$$\epsilon_t = \frac{r\epsilon_r}{r} = \frac{1}{E} \{ \sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z) \} \quad (10) \quad \sigma_z = \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_t) \} \quad (10)$$

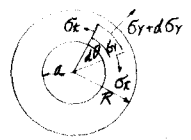


$$(10) \text{ 式を } r \text{ に就て微分して (9) 式に代入すると } (1+\nu)(\sigma_r - \sigma_t) - r \frac{d\sigma_r}{dr} + \nu r \frac{d\sigma_t}{dr} + \nu r \frac{d\sigma_z}{dr} = 0 \quad (11)$$

$$\text{又、(10) 式より } \frac{d\sigma_z}{dr} = \nu \frac{d\sigma_r}{dr} + \nu \frac{d\sigma_t}{dr} \quad (12) \quad (11) \text{ 式、(12) 式より } \sigma_r - \sigma_t + \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} - (1-\nu) r \frac{d\sigma_t}{dr} = 0 \quad (13)$$

$$(13) \text{ 式と (7) 式とより } \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_t}{dr} = 0 \quad \therefore \sigma_r + \sigma_t = C_1 \text{ (定数)} \quad (14)$$

$$(14) \text{ 式と (7) 式とより } \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_t}{dr} = 0 \quad (15) \quad (15) \text{ 式を } r \text{ について積分すると}$$



$$\frac{1}{2} \log(2\sigma_r - C_1) + \log r = \text{定数} \quad \text{或は} \quad r^2(2\sigma_r - C_1) = C_2 \text{ (定数)} \quad \text{又は}$$

$$\sigma_r = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2r^2} = A + \frac{B}{r^2} \quad (16) \quad (16) \text{ 式より } \sigma_t = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2r^2} = A - \frac{B}{r^2} \quad (17) \quad (17)$$

$$\text{従って } \left| \sigma_r \right|_{r=a} = A + \frac{B}{a^2} \quad (18) \quad \left| \sigma_t \right|_{r=R} = A - \frac{B}{R^2} \quad (19)$$

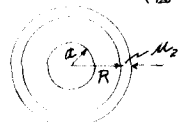
よって \$A, B\$ は積分定数で境界条件は (5) 式より \$r=a\$ で \$\sigma_r = \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \gamma Z\$、\$r=R\$ で \$\sigma_t = \sigma_r = K_m \gamma Z\$

従って \$\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \gamma Z = A + \frac{B}{a^2}\$、\$K_m \gamma Z = A - \frac{B}{R^2}\$ 両式より \$A, B\$ の値は次の如く求められる。

(図-5)

$$A = \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \gamma Z - \frac{1}{a^2} \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \gamma Z - \frac{K_m \gamma Z}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{R^2}}$$

$$B = \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} \gamma Z - K_m \gamma Z$$



さて、杭を地盤に貫入すると杭の体積に等しい土量を側方向に押圧する。杭周では最大の締固めが行われ、杭周から遠ざかるに従い、締固めは漸次減少し、或る巨離では土粒子の移動が静止する。杭心からの巨離を \$R\$ とすると、\$R\$ は破壊領域の限界点であると考えらる。

いま、\$R\$ の真の半径方向変位量を \$u_2\$、\$r \rightarrow R\$ の間の土の歪みを \$\frac{\partial u}{\partial r}\$ とすると、半径 \$R\$ の杭では次の方程式が成立する。即ち

$$\pi(R+u_2)^2 - \pi R^2 = \pi a^2 - 2\pi \int_a^R r \frac{\partial u}{\partial r} dr \quad (20)$$

$$\text{又、} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} (\Delta\sigma_r - \nu\Delta\sigma_t) \quad (21)$$

$$\text{但し } \Delta\sigma_r = \sigma_r - K_m \gamma Z, \quad \Delta\sigma_t = \sigma_t - K_m \gamma Z$$

$$\text{而して } \left| \sigma_r \right|_{r=a} = A + \frac{B}{a^2}, \quad \left| \sigma_t \right|_{r=R} = A - \frac{B}{R^2}$$

$$\text{従って } 2\pi \int_a^R r \frac{\partial u}{\partial r} dr = 2\pi \int_a^R r \frac{1}{E} \left\{ \left(A + \frac{B}{a^2} - K_m \gamma Z \right) - \nu \left(A - \frac{B}{R^2} - K_m \gamma Z \right) \right\} dr$$

$$= \frac{\pi}{E} \left\{ \left(A + \frac{B}{a^2} - K_m \gamma Z \right) - \nu \left(A - \frac{B}{R^2} - K_m \gamma Z \right) \right\} (R^2 - a^2)$$

さて、(20) 式の \$u_2\$ は \$R\$ より小さいから無視すると (20) 式は

$$2\pi u_2 = a^2 - \frac{1}{E} \left\{ \left(A + \frac{B}{a^2} - K_m \gamma Z \right) - \nu \left(A - \frac{B}{R^2} - K_m \gamma Z \right) \right\} (R^2 - a^2) \quad (22)$$

次に半径方向の歪み $\epsilon_r = \frac{\mu}{r}$ $\therefore \mu = r\epsilon_r = r \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_t) \dots\dots\dots (23)$

いま $\varphi = 30^\circ$ $K_m = 0.5$ $\nu = 0.3$ $2a = 15 \text{ cm}$ とすると

$$A = 312 - \frac{1}{7.5^2} \left(\frac{2.512}{\frac{1}{7.5^2} + \frac{1}{R^2}} \right)$$

$$B = \frac{2.512}{\frac{1}{7.5^2} + \frac{1}{R^2}}$$

従つて (22) 式の右辺は $\text{右辺} = a^2 - \frac{1}{E} \left\{ 2.512 - 0.3 \left(2.512 - \frac{2}{7.5^2} \cdot \frac{2.512}{\frac{1}{7.5^2} + \frac{1}{R^2}} \right) \right\} (R^2 - 7.5^2)$

次に $\sigma_r - \nu \sigma_t = A + \frac{B}{a^2} - \nu \left(A - \frac{B}{a^2} \right) = 2.182 + \frac{0.6}{7.5^2} \cdot \frac{2.512}{\frac{1}{7.5^2} + \frac{1}{R^2}}$

(23) 式に代入して $\mu = \frac{r}{E} \left(2.182 + \frac{0.6}{7.5^2} \cdot \frac{2.512}{\frac{1}{7.5^2} + \frac{1}{R^2}} \right) \dots\dots\dots (24)$

さて、破壊領域の境界長 R における変位量 μ_2 は (24) 式で $r = R$ とし

$$\mu_2 = \frac{R}{E} \left(2.182 + \frac{0.6}{7.5^2} \cdot \frac{2.512}{\frac{1}{7.5^2} + \frac{1}{R^2}} \right)$$

従つて (22) 式は $7.5^2 - \frac{1}{E} \left\{ 2.512 + \frac{0.6}{7.5^2} \cdot \frac{2.512}{\frac{1}{7.5^2} + \frac{1}{R^2}} \right\} (R^2 - 7.5^2) - \frac{2R^2}{E} \left(2.182 + \frac{0.6}{7.5^2} \cdot \frac{2.512}{\frac{1}{7.5^2} + \frac{1}{R^2}} \right)$
 簡単にして $7.45R^4 + (134.87512 - 56.25E)R^2 - (56.25E + 55.371182) = 0 \dots\dots\dots (25)$

即ち (25) 式は、破壊領域 R の数値が、土の弾性係数 E の値で表はされることになる。

E の値は $E = AIZ$ で示され、この式の係数 A の値は Terzaghi によると 200 ~ 1500、西田教授によると 20 ~ 170 の数値を示されている。 E の値が AIZ で表はされるから (25) 式の AIZ の項は消去されて、 R の値は E の値で表はされる。いま E の値を次の表示に依つて (25) 式の R の値を求めると (表-1)

E の値	R の値	$\frac{R}{a}$
2012	13.46 ^{cm}	1.79
5012	20.25	2.70
10012	28.09	3.74
17012	36.30	4.84
50012	61.73	8.23

即ち、破壊領域 R は弾性係数によつて変化する。

$\frac{R}{a}$ は杭半径の倍数で R の値を表はしているが

杭半径 r と破壊領域 R の関係式と文献から

求めると次式で示されている。即ち

$$K_m \leq K_s \leq K_m (1 + \sin \varphi) \left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{2 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} \dots\dots\dots (26)$$

但し K_s : 土圧係数で普通は 1 とされている。

(26) 式から杭半径・破壊領域に対する係数は、砂地盤では 2 ~ 8 と成つて、土の内摩擦角 φ によつて R の値が変化している。そこで (表-1) の $\frac{R}{a}$ を見ると $\frac{R}{a} \div 2$ の場合の土の弾性係数 E の値は $E = 2012$ で $\frac{R}{a} \div 8$ の場合は $E = 50012$ である。

一方、筆者等が砂地盤で行つた実験によると、 R の範囲は杭半径の 4 ~ 5 倍程度の結果を得ている。さうすると (表-1) で示される $\frac{R}{a}$ から考へて E の値は $E = 17012$ が妥当のように推定される。

筆者は、杭の先端支持力を求めるため、杭の破壊領域 R の値を先ず算定した。

杭の先端部は、一般に円錐形⁵⁾をなし、現在使用されているコンクリート杭は、其の円錐先端角度は 60° 程度である。そこで 60° の先端角度に對比して、30° の角度のものを探り上げて比較対照

に於て、いま(図-6)において、ABCを先端円錐部とし、其の先端角度を 2λ とする。円錐部斜面上に依りて剪断抵抗力を C とすると

$$C = \gamma H K_p \sin(\lambda + \varphi) \tan \varphi \quad (27)$$

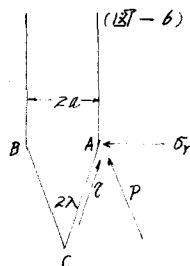
で表はされる。

但し、 H ：地表面より杭先端部迄の深さ

K_p ：受働土圧係数で $\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$ で表はされる。

φ ：土の内部摩擦角

γ ：土の単位重量



半径 r の杭周面に依りて土圧力を σ_r とすると(18)式より $\left| \sigma_r \right|_{r=a} = A + \frac{B}{r^2}$

いま $\varphi = 40^\circ$ $\gamma = 1.6 \text{ t/m}^3$ $a = 0.075 \text{ m}$

いま R の値として $R = 5a$ とすると $R = 0.375 \text{ m}$ $K_m = 0.5$ とすると $A = 1.044 \text{ t/m}^2$ $B = \frac{6.544 \text{ t/m}^2}{184.8 \text{ m}^2}$

従つて $\left| \sigma_r \right|_{r=a} = 2.34 \text{ t/m}^2$

先端角 $2\lambda = 30^\circ$ の場合

円錐部斜面上に依りて剪断抵抗力 C は(27)式より $C = 3.3 \text{ t/m}^2$

円錐体表面積 $A' = \frac{\pi}{2} 2a \left(\frac{2a}{2} + 5 \right) = 0.086 \text{ m}^2$ 但し S ：斜面の長さで 0.29 m

加ふるに σ_r は円錐体の尖角 C では零と考へ σ_r の値を平均値として $\sigma_r = \frac{2.34}{2} = 3.67 \text{ t/m}^2$

従つて合力 P は(図-7)

$$\cos 75^\circ = \frac{C + \sigma_r \cdot A'}{P} \text{ で求むる。}$$

$$\text{但し } C = 3.67 \times 0.086 = 0.316 \text{ t}$$

$$C = 3.3 \times 0.086 = 0.2838 \text{ t}$$

従つて合力 $P = 0.39 \text{ t}$ を得る。



(図-7)

先端角 $2\lambda = 60^\circ$ の場合

$$C = 3.78 \text{ t/m}^2 \quad S = 0.15 \text{ m} \quad A' = 0.053 \text{ m}^2 \quad \text{従つて合力 } P = 0.2 \text{ t}$$

即ち先端角 30° の場合、先端支持力 $= 390 \text{ kg}$ 、先端角 60° の場合は 200 kg となる。

さて、この計算で(27)式の φ の値と、表-1の E の値と、密着であるが、西田教授によると、次のように計算されている。即ち、 $\nu = \frac{1}{4}$ の場合、よく締つた砂では $E = 162 \text{ kg}$ 、中い砂では 29.8 kg

$\nu = \frac{1}{3}$ の場合、よく締つた砂では $E = 130 \text{ kg}$ 、中い砂では $E = 22.9 \text{ kg}$ となっている。

この場合、よく締つた砂の内部摩擦角 φ は 45° 程度であるが、又中い砂の場合、 φ は 28° 程度と考へられる。従つて、表-1の E の値と(27)式の φ の値とは密着が計算に合致しない。

前述のように筆者等の実験より得た結果によると、 $\frac{R}{a} = 4.5$ であり、この値に於ける E の値は表-1より 170 kg である。従つて、 φ の値は、よく締つた砂として 40° 程度の値を採つて計算することは妥当である。

この計算は円錐先端部を除外して、杭本体長さ 5 m としての計算であり、杭全長 5 m に採る場合の載荷試験の結果より得た支持力の数値は、先端角 $2\lambda = 30^\circ$ の杭では、降伏実荷重 760 kg 、先端角 60° の杭では、降伏実荷重 630 kg であることより判断すると、先端支持力の値としては、略々、妥当と考へられる。

参考文献 (1) 長武雄、渡田隆、山田孝士編、(2) 湯浅一男、材料力学(中巻)、(3) K. Terzaghi: Theoretical Soil Mechanics

(4) Timoshenko and Goodier: Theory of Elasticity (5) 西田義雄：砂地盤に於ける杭の円錐部・円錐土と基礎 (3-8)