III－9　　容量制約のある確率最大化による交通量配分

名古屋工業大学　正会員　松井　寛

1. まえがき　著者は道路網上の交通量配分を確率論的な立場から論じることによって、すでに確率最大化に基づいた新しい交通量配分手法を提案してきたが、これらは主に一定な走行時間を用い道路容量を考慮せずに解を求めている。

そこで本文では、この配分手法を容量制約を考慮した場合に拡張し、また簡単な計算例によってその求解の方法を示す。

2. 配分モデルの概要　確率最大化に基づく交通量配分モデルの概要は次のとおりである。さてある道路ネットワークに所定のOD交通量が分布する状態を考える。各OD間には利用可能な経路が何本かあらかじめ指定されている。いま k（$k=1,2,\cdots,g$）なるODの経路 r（$r=1,2,\cdots,n$）に配分される交通量を y_r^k、k なるODの交通量を S_k、リンク l（$l=1,2,\cdots,m$）上の走行時間を T_l で表わすと、結局確率的にみて最も起こりやすい配分パターンは次式を最小化する $\{y_r^k\}$ である。

$$\gamma\sum_l^m\sum_r^n\sum_k^g {}_l\delta_r^k y_r^k T_l + \sum_r^n\sum_k^g y_r^k \log y_r^k \qquad \cdots (1)$$

ただし、γ は定数、${}_l\delta_r^k$ は k なるODの経路 r がリンク l を含むとき1，含まないとき0の値を取る定数である。特に T_l がリンク交通量に無関係に一定値を取る場合、求める解は式(1)を条件式

$$\sum_r^n y_r^k = S_k \qquad \cdots (2)$$

の下で最小化することによって得られる。

3. 容量制約のある配分モデル

容量制約の概念の導入の仕方には、次の3方法が考えられる。以下順に述べる。

3－1. 走行時間関数を用いる方法

リンク走行時間を交通量の関数として表わし、いわゆる交通量－走行時間曲線を用いる方法である。この場合先の式(1)は、

$$\gamma\sum_l^m\sum_r^n\sum_k^g {}_l\delta_r^k y_r^k T_l\Big(\sum_r^n\sum_k^g {}_l\delta_r^k y_r^k\Big) + \sum_r^n\sum_k^g y_r^k \log y_r^k \qquad \cdots (3)$$

となり、よって式(3)を条件式(2)の下で最小化すればよい。これは数学的にはラグランジュの未定乗数法によって求められるが、目的関数が非線形なため厳密解を得ることは困難である。したがって傾斜法の1種であるFletcher－Powell法を用いて数値解析的に解くのが一般的であろう。

3－2. 容量制限不等式を用いる方法

この方法は直接容量制限を不等式条件として与える方法で、非線形計画法の問題となる。すなわち目的関数(1)を先の等式条件式(2)および不等式条件式

$$\sum_r^n\sum_k^g {}_l\delta_r^k y_r^k \leqq C_l \qquad \cdots (4)$$

の下で（さらに必要があれば、非負条件式 $y_r^k \geqq 0$ を与える）最小化することになる。ただし C_l はリンク l の容量を与える。この解法としてはSUMT法が利用できる。

SUMT法とは、上記の制約条件つきの最小化問題を次の制約条件のない最小化問題

$$\min\Big(\gamma\sum_l^m\sum_r^n\sum_k^g {}_l\delta_r^k y_r^k T_l + \sum_r^n\sum_k^g y_r^k \log y_r^k + r_s\sum_l^m\Big(C_l - \sum_r^n\sum_k^g {}_l\delta_r^k y_r^k\Big)^{-1} + r_s^{-1/2}\sum_k^g\Big(\sum_r^n y_r^k - S_k\Big)^2\Big) \cdots (5)$$

の解の $r_s \to 0$ の極限値として求める方法である。なお式(5)で与えられる最小化問題の解法にも、先のFletcher－Powell法が用いられる。

3－3. 両者を併用する方法

この方法は先の走行時間関数と容量に関する不等式条件を併用する方法である。よって問題は、目的関数(3)を等式条件式(2)および不等式条件式(4)の下で最小化する問題となり、その解はSUMT法とFletcher－Powell法によって同様に解くことができる。

4. 計算例

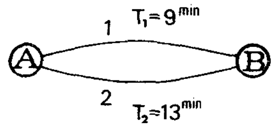

Fig. 1. Network

図－1に示すような2道路から成る簡単な道路ネットワークを考える。AB間の総交通量を$N=10{,}000$台/日とし、このうち道路i ($i=1,2$)の配分率をP_i、また走行時間をT_i(分)とする。

I. 容量制約のない場合

このとき問題は

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimize}\left(\gamma\sum_i P_i T_i + \sum_i P_i \log P_i\right) \\ \text{subject to} \quad \sum_i P_i = 1 \end{array}\right\} \cdots(6)$$

となり ラグランジュの未定乗数法によって、解は次のように簡単に求められる。

$$P_i = e^{-\gamma T_i} \Big/ \sum_i e^{-\gamma T_i} \quad (i=1,2) \qquad \cdots(7)$$

いま$\gamma=0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ \infty$と置いたときの解を表－1(I)に示す。(ただし$T_1=9,\ T_2=13$)

II. 走行時間関数を用いる場合

走行時間関数として次式を考える。

$$T_i = a_i \log(7000/7000 - NP_i) + b_i \qquad \cdots(8)$$

ただしa_i、b_iは常数で$a_1=0.7982$、$a_2=1.1530$、$b_1=9$、$b_2=13$とする。

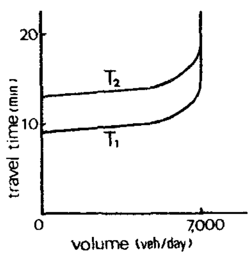

Fig. 2. Travel time function

式(8)で与えられる走行時間関数は図－2に示すように、各道路の容量を7,000台/日と考え、配分交通量がこの容量近くになると、走行時間が無限大となるように設定したものである。さて問題は

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimize}\left[\gamma\sum_i P_i\left\{a_i \log(7000/7000 - NP_i) + b_i\right\} + \sum_i P_i \log P_i\right] \\ \text{subject to} \quad \sum_i P_i = 1 \end{array}\right\} \cdots(9)$$

となり、先と同様にラグランジュの未定乗数法により解法が与えられるが、この場合はFletcher-Powell法によって数値解析的に解を求めねばならない。ただしこの問題では変数がP_1とP_2の2つであり、しかも等式条件を含んでいるので、この条件式よりP_2を消去すればP_1だけの変数となるので、この場合は1元高次代数方程式の解法であるNewton-Raphson法、すなわち$f(x)=0$の解を反復公式

$$\left.\begin{array}{l} x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ (k=1,2,\cdots\cdots) \end{array}\right\} (10)$$

から求める方法によって簡単に解ける。その結果を表－1(II)に示す。

Table 1 Summary of results

	γ	P_1	P_2	T_a
I	0	0.5000	0.5000	11.00
	0.1	0.5987	0.4013	10.60
	0.2	0.6900	0.3100	10.24
	0.3	0.7685	0.2315	9.93
	0.4	0.8320	0.1680	9.67
	0.5	0.8808	0.1192	9.48
	∞	1.0000	0.0000	9.00
II	0	0.5000	0.5000	12.22
	0.1	0.5622	0.4378	11.98
	0.2	0.5788	0.4212	11.94
	0.3	0.5859	0.4141	11.93
	0.4	0.5897	0.4103	11.93
	0.5	0.5921	0.4079	11.93
	∞	0.6022	0.3978	11.92
III	0	0.5000	0.5000	11.00
	0.1	0.5987	0.4013	10.61
	0.2	0.6898	0.3102	10.24
	0.3	0.6998	0.3002	10.20
	0.4	0.6998	0.3002	10.20
	0.5	0.6998	0.3002	10.20
	∞	0.7000	0.3000	10.20
IV	0	0.5000	0.5000	13.45
	0.1	0.5965	0.4035	12.98
	0.2	0.6443	0.3557	12.82
	0.3	0.6731	0.3269	12.74
	0.4	0.6923	0.3073	12.70
	0.5	0.6998	0.3002	12.68
	∞	0.7000	0.3000	12.68

T_a : average travel time (min.)

III. 容量制限不等式を用いる場合

各道路の容量を7,000台/日と仮定したとき、問題は次のようにかける。

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimize}\left(\gamma\sum_i P_i T_i + \sum_i P_i \log P_i\right) \\ \text{subject to} \quad \sum_i P_i = 1 \ \text{and} \ P_i \leqq 0.7 \end{array}\right\} \cdots(11)$$

となり、同じく等式条件式よりP_2を消去してからSUMT変換すると

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimize}\left\{\gamma(T_1P_1 + T_2(1-P_1)) + P_1\log P_1 \right. \\ \left. + (1-P_1)\log(1-P_1) + r_5(0.7-P_1)^{-1} + r_5(P_1-0.3)^{-1}\right\} \end{array}\right\} \cdots(12)$$

となり、解は$r_5\to 0$の極限値として求まる。(表-1(III))

IV. 両者を併用する場合

走行時間として線形関数を考える。

$$T_i = a_i N P_i + b_i \quad (i=1,2) \qquad \cdots(13)$$

ただし$a_1=4$、$a_2=5.8$、$b_1=9$、$b_2=13$とする。

よって問題は

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimize}\left\{\gamma\sum_i P_i(a_i N P_i + b_i) + \sum_i P_i \log P_i\right\} \\ \text{subject to} \quad \sum_i P_i = 1 \ \text{and} \ P_i \leqq 0.7 \end{array}\right\} \cdots(14)$$

となり、同様にSUMT変換より解が求まる。(表-1(IV))