Ⅱ－9　　　　貯水池内の水の流れについて

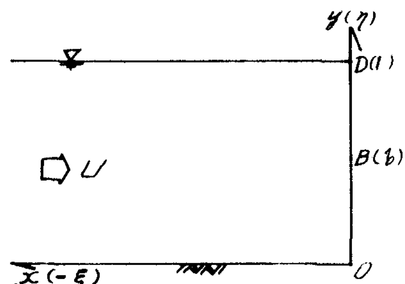
名古屋大学　正員　西畑勇夫
名古屋大学　学生員　○鍵嶋淳一

1　まえがき

貯水池の機能の1つに流入土砂の調節作用がある。貯水池に流入した土砂の運動形態を把握するためには、密度流としての池内水の運動を解析する必要がある。本論では、YIHの理論を用いて、密度流としての池内水の流線を求め、隅角部から発生する淀み領域が、取水口の位置と、取水流量の大きさに多分に影響されることを示した。

2　密度流の基礎方程式

貯水池は2次元で、流れは定常流、非粘性流体とする。
Navier-Stokesの運動方程式は次のようになる。



$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad\cdots\quad (1)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-g \quad\cdots\quad (2)$$

連続方程式は次のようになる。

$$u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \quad\cdots\quad (3)$$

ここで、密度は流線に沿って一定とすると

$$u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}=0$$

となるから(3)式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad\cdots\quad (4)$$

x, yは直交座標、u, vはx, y方向の速度成分、gは重力の加速度、ρは密度とする。
ここでρ_0を基準密度として、YIHの変換を行なう。

$$(u', v')=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2}(u, v)$$

このとき(1), (2)式と(4)式は次のようになる。

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial u'}{\partial y}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} \quad\cdots\quad (5)$$

$$u'\frac{\partial v'}{\partial x} + v'\frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\rho}{\rho_0}g \quad \cdots (6)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad \cdots (7)$$

(7)を満足する流れ関数 Ψ' を導入し(5),(6)

$$u' = \frac{\partial \Psi'}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x}$$

を用いて次式をうる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi' = \frac{1}{\rho_0}\frac{dH}{d\Psi'} - \frac{g}{\rho_0}y\frac{d\rho}{d\Psi'}$$

但し H は Bernoulli の関係式である。

$$H = p + \frac{\rho_0(u'^2 + v'^2)}{2} + \rho g y \quad \cdots (8)$$

次の2つの仮定を用いると(8)式は線形になる。

① 取水口から十分上流の水の密度分布は y の1次関数として近似される。

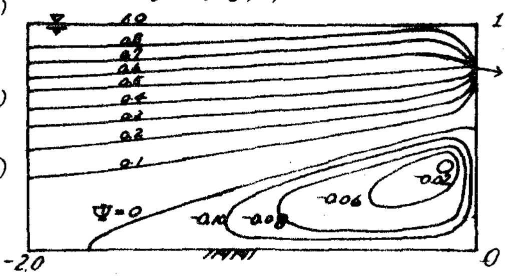
$$\rho(-\infty, y) = \rho_0(1 - \beta y), \quad \beta = (\rho_0 - \rho_1)/\rho_0 D$$

ρ_0, ρ_1 は池底、池表密度、D は水深。

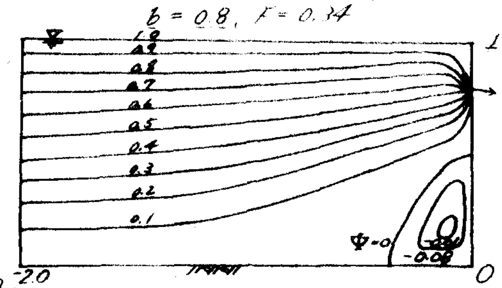
② 取水口から十分上流の流速 u' は一定。

$u' = U$ つまり $\Psi' = Uy$

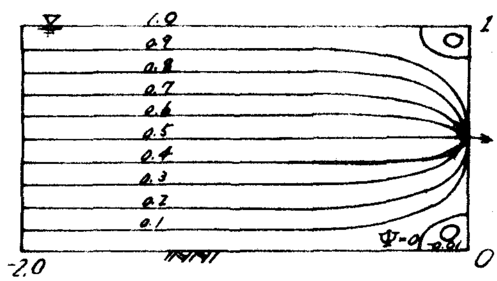
$b = 0.8,\ F = 0.32$



$b = 0.8,\ F = 0.34$



$b = 0.5\ \ F = 0.32$



このとき次式をうる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)\Psi + F^{-2}\Psi = F^{-2}\eta \qquad (9)$$

但し $\quad \xi = \frac{x}{D}, \quad \eta = \frac{y}{D}, \quad \Psi = \frac{\Psi'}{UD}, \quad F = \frac{Q}{WD^2\sqrt{g\beta}}$

Q は取水流量、W は貯水池平均巾。

(9)式を次の境界条件で解くと、密度流としての流れ関数 Ψ をうる。

境界条件

① $\xi = 0$ $\begin{cases} b < \eta \leq 1 & \Psi = 1 \\ 0 \leq \eta < b & \Psi = 0 \end{cases}$

② $-\infty < \xi \leq 0 \quad \eta = 1 \quad \Psi = 1$

③ $-\infty < \xi \leq 0 \quad \eta = 0 \quad \Psi = 0$

④ $\xi = 0 \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad \Psi = \eta$

$$\Psi = \eta + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\cos n\pi b\cdot\sin n\pi\eta\cdot\exp(n^2\pi^2 - F^{-2})^{1/2}\xi \cdots (10)$$