

名古屋工業大学 正員 岡林 稔
同 正員 長谷部 宣男
同 大学院○学生員 横田 宏昌

おまへがき

Y字型ラーメンには3軸引張り、および2軸面内曲げモーメントの作用した平面弾性問題として、Y字型ラーメン隅角部附近の応力分布については、先に文献1で発表した。ここでは境界線上に面外曲げモーメントの作用した、いわゆる薄板の曲げ問題としてY字形板の応力分布を求めたものである。

Y字形板を平面弾性問題として解こうとするとき、その領域が有理関数により単位円に等角写像される場合には、Fredholmの積分方程式を解くことなく閉じた解が得られるが(文献2)、薄板の曲げの問題として、面外荷重が作用した場合にも、その領域が有理関数により単位円に等角写像される場合には、やはりFredholmの積分方程式を解くことなく閉じた解が得られる。(文献3) Y字形領域を単位円に等角写像する関数は、Schwarz-Christoffelの変換公式を用いて得られるが、この関数は有理関数でない。したがって問題は、いかにして精度のよい有理型の写像関数を作るかであるが、ここでは先に文献1で述べた分数式の和の形の有理写像関数を用いて応力解析した。

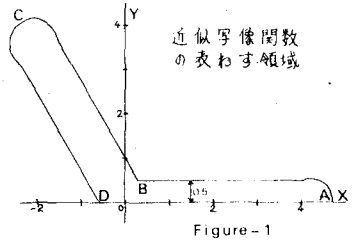


Figure-1

応力計算の基本式および境界条件

薄板の境界線上に、面外荷重が作用した場合、その中立面の垂直変位 w の満たすべき条件式は、

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^4} = 0$$

である。従って、 w は重調和関数であり、その一般解は

$$w(x, y) = \operatorname{Re} [\bar{Z} \varphi(Z) + \chi(Z)] \quad \text{但し } Z = x + iy$$

で表わされる(文献2)。そこで、曲げモーメント M_θ, M_ρ ねじりモーメント $H_{\rho\theta}$ は複素応力関数、および写像関数 $\omega(\zeta)$ を用いて

$$M_\rho + M_\theta = -2D(1+\nu) \left[\frac{\varphi(\zeta)}{\omega(\zeta)} + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\overline{\omega(\zeta)}} \right] \quad \text{但し } \psi(\zeta) = \chi'(\zeta)$$

$$M_\theta - M_\rho + 2iH_{\rho\theta} = \frac{2D(1-\nu)\zeta^2}{|\zeta|^2 \omega'(\zeta)} \left[\overline{\omega(\zeta)} \left\{ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\}' + \psi(\zeta) \right]$$

と表わされる。ここに ν は曲げ剛さ、 ρ はポアソン比である。

複素応力関数を定めるために満足すべき境界条件は、境界線上に沿う面外荷重の曲げモーメントを $m(\zeta)$ 、中立面に垂直な力を $p(\zeta)$ とすると、 ζ 平面の単位円周上 $\delta = e^{i\theta}$ で、

$$-\frac{3+\nu}{1+\nu}\varphi(\delta)+\frac{\omega(\delta)}{\omega(\delta)}\overline{\varphi(\delta)}+\overline{\varphi(\delta)}=f_1+i f_2 \quad (1)$$

ここに

$$f_1+i f_2=\frac{1}{D(1-\nu)}\left(\int_0^S[m(s)+i\int_0^S p(s)ds\right]dz$$

である。

(1)式の両辺に $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\delta}{\delta-3}$ を乗じ、単位円周上での周回積分を行なうと、コーシーの定理により、

$$-\frac{3+\nu}{1+\nu}\varphi(\zeta)+\frac{\omega(\zeta)}{\omega(\zeta)}\overline{\varphi(\zeta)}+\overline{\varphi(\zeta)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-3}^{\zeta} \frac{f_1+i f_2}{\delta-3}d\delta=A(\zeta) \quad \dots (2)$$

となる。求めたり未知関数 $\varphi(\zeta)$ は、今の場合、写像関数

$\omega(\zeta)$ が、単位円内で正則、単位円外で49個の点で一位の極を持つ関数で、また、 $\omega(\zeta)$ は単位円内で零点を持たない関数であることを考えて(文献17)、 $\varphi(\zeta)$ の未定係数につき、98元一次の連立方程式を解くことによって、 $\varphi(\zeta)$ を求めることが出来る。 $\varphi(\zeta)$ が求めれば、 $\psi(\zeta)$ は(1)式の共役な式より求めることが出来る。境界条件として、ACE3点に1.0の面外の曲げモーメントを作用させた場合を考える。(図-2) 式(2)における $A(\zeta)$ の一次導関数は、

$$A'(\zeta)=\frac{1}{2\pi D(1-\nu)} \frac{3}{1-\zeta^3}$$

である。

計算結果

前述の如く、ACEの3点に1.0の曲げモーメントを作用した場合を、ポアソン比を0.3として、隅角部附近の境界線、及び実軸上に沿う曲げモーメントを、図2、及び図3に示した。そして、これらの数値を示したのが表1である。図2,3を考察してみると、境界線上では M_θ は当然0であり、 M_θ は1.0から隅角部に近づくに従って、急に増加し、最大曲げモーメント5.04に達している。実軸上に沿う M_y の値も帯の先端では0に等しく、隅角部に近づくにつれて漸増しており、最大曲げモーメントに達する。 M_x の値はやはり帯の先端では1.0であり、 $x=0.5$ 附近から減少、隅角点Dにおいて0になる。

(参考文献)

- (1) 岡林、長谷部、横田：「Y型ラ－X隅角部の応力解析」オ25回年次学術講演会講演集
- (2) Muskhelishvili: 「Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity」
- (3) G. N. Savin: 「Stress Concentration around Holes」 Pergamon Press Chap. VI

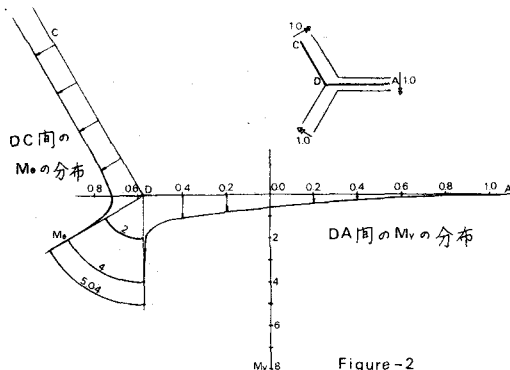


Figure-2

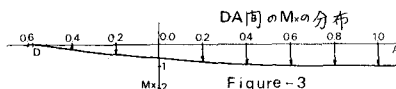


Figure-3

座 標		3軸曲げ	
x	y	M _θ	M _φ
3.27974	0.0	1.00	0.00
2.54688	~	1.00	0.00
1.74164	~	0.99	0.01
1.02908	~	0.99	0.06
0.61874	~	0.97	0.16
0.41411	~	0.92	0.27
0.25317	~	0.84	0.39
0.10621	~	0.72	0.52
-0.03790	~	0.58	0.65
-0.18107	~	0.45	0.79
-0.31761	~	0.32	0.94
-0.43655	~	0.20	1.13
-0.52684	~	0.06	1.46
-0.57749	0.0	0.00	5.04
-0.60526	0.04839	0.00	1.31
-0.61681	0.06855	~	1.24
-0.63707	0.10339	~	1.17
-0.66088	0.14458	~	1.12
-0.68926	0.18387	~	1.09
-0.72404	0.25431	~	1.07
-0.76909	0.33198	~	1.04
-0.83259	0.44147	~	1.03
-0.95458	0.65416	~	1.02
-1.01838	0.76582	~	1.01
-1.12992	0.85655	~	1.00
-1.32099	1.28865	~	1.00
-1.70630	1.95568	~	1.00
-2.07271	2.59031	0.00	1.00

Table-1