I-26

フーリエ変換を応用した二次元弾性問題の解法の拡張

名古屋工業大学 正員 岡林 総
港湾技術研究所 正員 ○市原 正史

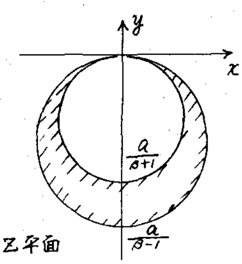
1 緒言

二次元弾性問題において、与えられた境界条件のもとで解を求めるためには、一般に Fredholm の積分方程式を解かねばならないが、普通この方程式を解くことは容易でない。そのため、積分方程式を解くことなく解を得る方法がいろいろ考察されている。その中で、Sneddon は領域が半平面の場合、または、無限に長い帯状領域の場合について、フーリエ変換を応用した解法を示している。

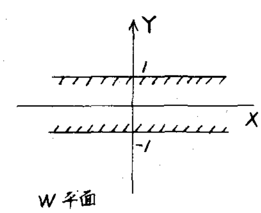
そこで、この解法を拡張して、従来は近似写像関数を用いて解かれている領域にたいして閉じた解を得る方法を図1に示す領域を無限に長い帯状領域（図2）に等角写像して考察した。

2 解法

この場合、写像関数は $Z = a/(W+i\beta)$（ただし a, β は実定数）によって表わされる。また応力関数 ϕ は二つの調和関数 U, V を用いて $\phi = U + yV$ と表わすことができる。



（図 1）



（図 2）

したがって W 平面では

$$\phi(X,Y) = U(X,Y) - \frac{a(Y+\beta)}{X^2+(Y+\beta)^2} V(X,Y) \qquad (1)$$

と表わすことができる。ここで $U(X,Y)$, $V(X,Y)$ は X, Y に関して調和関数であるから Laplace の微分方程式を満足するから U, V のフーリエ変換を $\overline{U}$, $\overline{V}$ とおけば、$\overline{U}$, $\overline{V}$ はつぎの微分方程式を満足する。

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2\right)\overline{U} = 0 \quad ; \quad \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2\right)\overline{V} = 0 \qquad (2)$$

したがって一般解は

$$\overline{U}(\xi,Y) = A(\xi)e^{\xi Y} + B(\xi)e^{-\xi Y} \quad ; \quad \overline{V}(\xi,Y) = C(\xi)e^{\xi Y} + D(\xi)e^{-\xi Y} \qquad (3)$$

したがって (1) 式をフーリエ変換すればつぎの式を得る。（convolution 定理）

$$\overline{\phi}(\xi,Y) = A(\xi)e^{\xi Y} + B(\xi)e^{-\xi Y} + \frac{a}{2}e^{-\xi(Y+\beta)}\int_{-\infty}^{\xi}\{C(\eta)e^{(2Y+\beta)\eta} + D(\eta)e^{\beta\eta}\}d\eta + \frac{a}{2}e^{\xi(Y+\beta)}\int_{\xi}^{\infty}\{C(\eta)e^{-\beta\eta} + D(\eta)e^{-(2Y+\beta)\eta}\}d\eta \qquad (4)$$

境界条件は図3に示すリング状領域の外側において

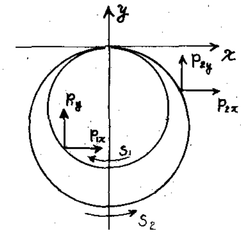
$$(\phi)_{Y=1} = \int_0^{s_1}\left[-\frac{dx}{ds_1}\int_0^{s_1}P_{1y}\,ds_1 + \frac{dy}{ds_1}\int_0^{s_1}P_{1x}\,ds_1\right]ds_1 + C_1x + C_2y + C_3 = g_1(x)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y}\right)_{Y=1} = \frac{\partial y}{\partial Y}\int_0^{s_1}P_{1x}\,ds_1 - \frac{\partial x}{\partial Y}\int_0^{s_1}P_{1y}\,ds_1 + \frac{\partial y}{\partial Y}C_1 + \frac{\partial x}{\partial Y}C_2 = f_1(x)$$

内側において

$$(\phi)_{Y=-1} = \int_0^{s_2}\left[-\frac{dx}{ds_2}\int_0^{s_2}P_{2y}\,ds_2 + \frac{dy}{ds_2}\int_0^{s_2}P_{2x}\,ds_2\right]ds_2 + C_1'x + C_2'y + C_3' = g_2(X)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y}\right)_{Y=-1} = \frac{\partial y}{\partial Y}\int_0^{s_2}P_{2x}\,ds_2 - \frac{\partial x}{\partial Y}\int_0^{s_2}P_{2y}\,ds_2 + \frac{\partial y}{\partial Y}C_1' + \frac{\partial x}{\partial Y}C_2' = f_2(X)$$



（図 3）

これらの式を $g_1(X)$, $g_2(X)$, $f_1(X)$, $f_2(X)$ とおき、それをフーリエ変換したものをそれぞれ $\overline{g_1}(\xi)$, $\overline{g_2}(\xi)$, $\overline{f_1}(\xi)$, $\overline{f_2}(\xi)$ とすれば、(4) 式を用いてつぎの $A(\xi)$, $B(\xi)$, $C(\xi)$, $D(\xi)$ に関する四元連立方程式を得ることができる。

$$\bar{f}_1 = A\xi e^{\xi} - B\xi e^{-\xi} - \frac{a}{2}\xi e^{-\xi(\beta+1)}\int_{-\infty}^{\xi}\{C(\eta)e^{(\beta+2)\eta} + D(\eta)e^{\beta\eta}\}d\eta + \frac{a}{2}\xi e^{\xi(\beta+1)}\int_{\xi}^{\infty}\{C(\eta)e^{-\beta\eta} + D(\eta)e^{-(\beta+2)\eta}\}d\eta$$
$$+ a e^{-\xi(\beta+1)}\int_{-\infty}^{\xi}\eta C(\eta)e^{(\beta+2)\eta}d\eta - a e^{\xi(\beta+1)}\int_{\xi}^{\infty}\eta D(\eta)e^{-(\beta+2)\eta}d\eta$$

$$\bar{f}_2 = A\xi e^{-\xi} - B\xi e^{\xi} - \frac{a}{2}\xi e^{-\xi(\beta-1)}\int_{-\infty}^{\xi}\{C(\eta)e^{(\beta-2)\eta} + D(\eta)e^{-\beta\eta}\}d\eta + \frac{a}{2}\xi e^{\xi(\beta-1)}\int_{\xi}^{\infty}\{C(\eta)e^{-\beta\eta} + D(\eta)e^{-(\beta-2)\eta}\}d\eta$$
$$+ a e^{-\xi(\beta-1)}\int_{-\infty}^{\xi}\eta C(\eta)e^{(\beta-2)\eta}d\eta - a e^{\xi(\beta-1)}\int_{\xi}^{\infty}\eta D(\eta)e^{-(\beta-2)\eta}d\eta$$

$$\bar{g}_1 = Ae^{\xi} + Be^{-\xi} + \frac{a}{2}e^{-\xi(\beta+1)}\int_{-\infty}^{\xi}\{C(\eta)e^{(\beta+2)\eta} + D(\eta)e^{\beta\eta}\}d\eta + \frac{a}{2}e^{\xi(\beta+1)}\int_{\xi}^{\infty}\{C(\eta)e^{-\beta\eta} + D(\eta)e^{-(\beta+2)\eta}\}d\eta$$

$$\bar{g}_2 = Ae^{-\xi} + Be^{\xi} + \frac{a}{2}e^{-\xi(\beta-1)}\int_{-\infty}^{\xi}\{C(\eta)e^{(\beta-2)\eta} + D(\eta)e^{\beta\eta}\}d\eta + \frac{a}{2}e^{\xi(\beta-1)}\int_{\xi}^{\infty}\{C(\eta)e^{-\beta\eta} + D(\eta)e^{-(\beta-2)\eta}\}d\eta$$

この連立方程式を解けば

$$A(\xi) = -e^{\beta\xi}\int^{\xi}\frac{\eta}{e^{\beta\eta}}P(\eta)d\eta + \xi e^{\beta\xi}\int^{\xi}\frac{1}{e^{\beta\eta}}P(\eta)d\eta$$
$$B(\xi) = -e^{-\beta\xi}\int^{\xi}\frac{\eta}{e^{-\beta\eta}}Q(\eta)d\eta + \xi e^{-\beta\xi}\int^{\xi}\frac{1}{e^{-\beta\eta}}Q(\eta)d\eta$$
$$C(\xi) = R(\xi) + \frac{2}{a}e^{\beta\xi}\int^{\xi}\frac{1}{e^{\beta\eta}}P(\eta)d\eta + \{(\beta\sinh 2\xi - \cosh 2\xi)P(\xi) - Q(\xi)\} / \{a(\beta+1)(\beta-1)\sinh 2\xi\}$$
$$D(\xi) = S(\xi) - \frac{2}{a}e^{-\beta\xi}\int^{\xi}\frac{1}{e^{-\beta\eta}}Q(\eta)d\eta + \{(\beta\sinh 2\xi - \cosh 2\xi)Q(\xi) + P(\xi)\} / \{a(\beta+1)(\beta-1)\sinh 2\xi\}$$

（ただし、$P(\xi)$, $Q(\xi)$, $R(\xi)$, $S(\xi)$ は境界条件から定まる既知関数）

となり、応力関数をフーリエ変換した式はつぎのように求まる。

$$\bar{\phi}(\xi, Y) = -e^{\xi(\beta+Y)}\int^{\xi}\frac{\eta}{e^{\beta\eta}}P(\eta)d\eta + \xi e^{\xi(\beta+Y)}\int^{\xi}\frac{1}{e^{\beta\eta}}P(\eta)d\eta - e^{-\xi(\beta+Y)}\int^{\xi}\frac{\eta}{e^{-\beta\eta}}Q(\eta)d\eta + \xi e^{-\xi(\beta+Y)}\int^{\xi}\frac{1}{e^{-\beta\eta}}Q(\eta)d\eta$$
$$+ \frac{a}{2}e^{-\xi(\beta+Y)}\int_{-\infty}^{\xi}\Big[R(\eta) + \frac{2}{a}e^{\beta\eta}\int^{\eta}\frac{1}{e^{\beta\varsigma}}P(\varsigma)d\varsigma + \frac{(\beta\sinh 2\eta - \cosh 2\eta)P(\eta) - Q(\eta)}{a(\beta+1)(\beta-1)\sinh 2\eta}\Big]e^{(2Y+\beta)\eta}d\eta$$
$$+ \frac{a}{2}e^{-\xi(\beta+Y)}\int_{-\infty}^{\xi}\Big[S(\eta) - \frac{2}{a}e^{-\beta\eta}\int^{\eta}\frac{1}{e^{-\beta\varsigma}}Q(\varsigma)d\varsigma + \frac{(\beta\sinh 2\eta + \cosh 2\eta)Q(\eta) + P(\eta)}{a(\beta+1)(\beta-1)\sinh 2\eta}\Big]e^{\beta\eta}d\eta$$
$$+ \frac{a}{2}e^{\xi(\beta+Y)}\int_{\xi}^{\infty}\Big[R(\eta) + \frac{2}{a}e^{\beta\eta}\int^{\eta}\frac{1}{e^{\beta\varsigma}}P(\varsigma)d\varsigma + \frac{(\beta\sinh 2\eta - \cosh 2\eta)P(\eta) - Q(\eta)}{a(\beta+1)(\beta-1)\sinh 2\eta}\Big]e^{-\beta\eta}d\eta$$
$$+ \frac{a}{2}e^{\xi(\beta+Y)}\int_{\xi}^{\infty}\Big[S(\eta) - \frac{2}{a}e^{-\beta\eta}\int^{\eta}\frac{1}{e^{-\beta\varsigma}}Q(\varsigma)d\varsigma + \frac{(\beta\sinh 2\eta - \cosh 2\eta)Q(\eta) + P(\eta)}{a(\beta+1)(\beta-1)\sinh 2\eta}\Big]e^{-(2Y+\beta)\eta}d\eta$$

したがつて、応力は反転公式と写像関数を用いて、つぎの式から求めることができる。

$$\sigma_x = -\frac{2a^2x^2y^2}{(x^2+y^2)^4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\bar{\phi}e^{-i\xi X}d\xi + \frac{a^2(x^2-y^2)^2}{2(x^2+y^2)\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial Y^2}e^{-i\xi X}d\xi - \frac{2a^2xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4\pi}i\int_{-\infty}^{\infty}\xi\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial Y}e^{-i\xi X}d\xi$$
$$+ \frac{ax^3-3axy^2}{(x^2+y^2)^3\pi}i\int_{-\infty}^{\infty}\xi\bar{\phi}e^{-i\xi X}d\xi - \frac{ay^3-3ax^2y}{(x^2+y^2)^3\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial Y}e^{-i\xi X}d\xi$$

$$\sigma_y = -\frac{a^2(x^2-y^2)^2}{2(x^2+y^2)^4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\bar{\phi}e^{-i\xi X}d\xi + \frac{2a^2x^2y^2}{(x^2+y^2)^4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial Y^2}e^{-i\xi X}d\xi + \frac{2a^2xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4\pi}i\int_{-\infty}^{\infty}\xi\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial Y}e^{-i\xi X}d\xi$$
$$- \frac{ax^3-3axy^2}{(x^2+y^2)^3\pi}i\int_{-\infty}^{\infty}\xi\bar{\phi}e^{-i\xi X}d\xi + \frac{ay^3-3ax^2y}{(x^2+y^2)^3\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial Y}e^{-i\xi X}d\xi$$

$$\tau_{xy} = \frac{a^2xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\bar{\phi}e^{-i\xi X}d\xi + \frac{a^2(x^2-y^2)^2}{2(x^2+y^2)^4\pi}i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial Y}e^{-i\xi X}d\xi - \frac{2a^2x^2y^2}{(x^2+y^2)^4\pi}i\int_{-\infty}^{\infty}\xi\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial Y}e^{-i\xi X}d\xi$$
$$+ \frac{a^2xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial Y^2}e^{-i\xi X}d\xi - \frac{ay^2-3ax^2y}{(x^2+y^2)^3\pi}i\int_{-\infty}^{\infty}\xi\bar{\phi}e^{-i\xi X}d\xi - \frac{ax^3-3axy^2}{(x^2+y^2)^3\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial Y}e^{-i\xi X}d\xi$$

3 結語

以上に述べたように、図1に示したリング状領域に対する閉じた解を得ることができたが、実際に与えられた荷重に対して解を得るためには、境界条件式のフーリエ変換が可能でなくてはならないし、また、応力を数値で求めるためには、数値積分がかなり困難である。また他の領域に対する考察も今後の問題点として残されている。

参考文献

(1) I. N. Sneddon　Fourier Transform

(2) 岡林「任意の境界を有する二次元弾性体がその境界条件として境界上の応力分布が与えられた場合の一般解法について」

(3) 岡林「領域が有理関数によって直線境界の半平面に等角写像される場合の二次元弾性問題の解法およびくさび状の裂目を有する無限板への応用」（土木学会論文集 第119号）