

名古屋大学 正員 川本勝万

学生員 梶田建夫

○学生員 宮地支人

1. まえがき

有限要素法による解析過程は、つぎの三つに分けられる。まず構造物を不連続な要素の集合に分割することであり、次2に要素のStiffnessを計算すること、次3に全体の要素に対する構造解析で、各要素のStiffness Matrixを加え合わせ、全体のStiffness Matrixを作り、この行列の逆行列を計算して、節点に作用している外力 $\{R\}$ と、それによる変位 $\{u\}$ との間の関係 $\{t\} = \{K\}^{-1} \{R\}$ より、与えられた荷重による変形量を計算する。以上の過程における問題は、次のようなものである。第一に、構造物は、実際には無限個の要素の集合であるわけだが、これを有限個の要素の集合として取り扱うためには、要素分割の増加、言い換えれば個々の要素が小さくなるに従って、解の収束性が保証される必要がある。この保証なくして、要素分割を多くすれば解は厳密解に収束すると言っているのは、危険である。第二に、どう大なStiffness Matrixを、連立方程式の係数項として解くにあたり、これは、電子計算機を用いるのだから、その計算過程における解の収束性あるいは厳密性についてこの保証をなすべからない。

応力集中の生ずるような構造物の解析に有限要素法を適用するにあたり、これは、応力集中域の急激な応力およびひずみ状態の変化を忠実に表現しうべく、その領域における要素分割はいささか細分することになり、上に述べたような問題につき合ふことから、本文では要素分割の増加、および分割パターン形状による解の収束性の理論的検討および、数値計算における解によって、要素分割の増加に伴う解の収束性について検討する。

このほか、解の精度を高めるため要素内で応力およびひずみが線型に変化するべく作られた、3節点3角形要素があり、これを用いて解析を行った場合の数値計算における解の検討を行う。

2. 3角形3節点要素の解の収束特性

この問題を検討するために、Joseph E. Walz*らは、注目する節点の力のつり合い式を、変位変数を用いてあらわす。一般の有限要素式を用いた。この有限要素式は、節点におけるTirion展開を行うことにより、有限要素式に等価な微分方程式に書き換えられる。これを、有限要素法で近似せんとする連続体の支配関数(力のつり合い式)と比較することにより検討が行われる。

またおよび方向の変位によってあらわされた2次元平面応力状態におけるつり合い方程式は次式で与えられる。

$$u_{,xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{,yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{,xy} + \frac{P_x}{B} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1+\nu}{2} u_{,xy} + \frac{1-\nu}{2} v_{,xx} + v_{,yy} + \frac{P_y}{B} = 0 \quad (2)$$

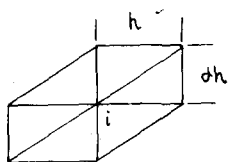
ここで u , v はそれぞれ x および y 方向の変位、 P_x , P_y は分布荷重、 ν はポアソン比、 t は板の厚さ、 $B = Et / (1 - \nu^2)$ である。

つぎに、図-1に示す3角形要素の各10ターンに対して、節点 i について、た有限要素式を、Taylor展開し、(1), (2)式と比較した結果を表-1に示す。

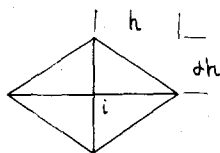
これらによれば10ターンAおよびDは、 h が無限小になるに伴い(1), (2)式に収束し、エラーのオーダーは h^2 である。10ターンBおよびCは、(1), (2)式の v_{xy}, u_{xy} の項の一致を見ず、したがって h が無限小に収束しても、(1), (2)式に収束せず、解の収束の保証が得られぬ h に h がわかる。したがって解の収束に対して、要素の10ターンが大きく影響することを考慮しなくてはならない。

表-1

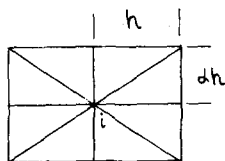
Pattern Equation	Error terms
A (1)	$+ \frac{h^2}{12} [u_{xxxx} + \partial^2 (\frac{1-\nu}{2}) u_{yyyy} + 2\partial u_{xxxy} + 3\partial^2 v_{xxyy} + 2\partial^3 v_{xyyy}] + \dots$
(2)	$+ \frac{h^2}{12} [2\partial u_{xxxy} + 3\partial^2 u_{xxyy} + 2\partial^3 u_{xyyy} + (\frac{1-\nu}{2}) v_{xxxx} + \partial^2 v_{yyyy}] + \dots$
B (1)	$- \frac{1+\nu}{2} v_{xy} + \frac{h^2}{12} [u_{xxxx} + \frac{1-\nu}{2} \partial^2 u_{yyyy}] + \dots$
(2)	$- \frac{1+\nu}{2} u_{xy} + \frac{h^2}{12} [\frac{1-\nu}{2} v_{xxxx} + \partial^2 v_{yyyy}] + \dots$
C (1)	$+ \frac{1+\nu}{2} v_{xy} + \frac{h^2}{12} [u_{xxxx} + \frac{1-\nu}{2} \partial^2 u_{yyyy} + 2(1+\nu) v_{xxxy} + 2(1+\nu) \partial^2 v_{xyyy}] + \dots$
(2)	$+ \frac{1+\nu}{2} u_{xy} + \frac{h^2}{12} [2(1+\nu) u_{xxxy} + 2(1+\nu) \partial^2 u_{xyyy} + \frac{1-\nu}{2} v_{xxxx} + \partial^2 v_{yyyy}] + \dots$
D (1)	$+ h^2 [\frac{7+\nu}{96} u_{xxxx} + \frac{1+\nu}{16} u_{xxyy} + \frac{1-\nu}{32} u_{yyyy} + \frac{1+\nu}{48} v_{xxxy} + \frac{1+\nu}{16} v_{xxyy}] + \dots$
(2)	$+ h^2 [\frac{1+\nu}{16} u_{xxxy} + \frac{1+\nu}{48} u_{xyyy} + \frac{1-\nu}{32} v_{xxxx} + \frac{1+\nu}{16} v_{xxyy} + \frac{7+\nu}{96} v_{yyyy}] + \dots$



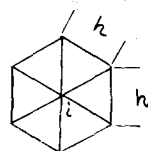
Pattern A



Pattern B



Pattern C



Pattern D

図-1

* Joseph E. Walz, Robert E. Fulton, and Nancy Jane Gryus ACCURACY AND CONVERGENCE OF FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS Presented at the Air Force Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics NASA Langley Research Center Langley Station, Hampton, Va.

3. あとがき

3角形3節点要素による数値計算結果の検討および、3角形6節点要素による結果の検討については、当日発表するにせし、ここでは省略する。

1969年 12月 20日