漸化有限要素法による平板の曲げ解析

信州大学　○学生員　熊川仁金

正　員　夏目正太郎　谷本勉之助

1. まえがき

漸化有限要素法は従来の有限要素法に用いられている仮想仕事の原理，変分原理などを用いることのないまったく新らしい解析方法である．これは板の基本微分方程式を解くことから出発するものである．各節点において力釣り合い式を立てれば自動的に漸化式が得られる，このことは電子計算機の能率をよくするばかりでなく多元の連立方程式を解く必要がない．（平板の曲げ解析においては1節点の自由度が3であるので3行3列の逆マトリクスをつくることですむ．別の方法として才：集約方向の節点数をnとすると$3n$行$3n$列の逆マトリクスをつくることでも可能である）．

2. 基本式の誘導

板の基本微分方程式を解くことによって得られる変位状態ベクトルと応力状態ベクトルは次式で示す，

$$\mathbb{U}(\xi,\eta) = \mathbb{P}(\xi,\eta)\mathbb{X} + \mathbb{u}(\xi,\eta)q, \qquad (1a)$$

$$\mathbb{V}(\xi,\eta) = \mathbb{Q}(\xi,\eta)\mathbb{X} + \mathbb{v}(\xi,\eta)q, \qquad (1b)$$

ここに

$$\mathbb{U}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} w \\ \theta_\xi \\ \theta_\eta \end{bmatrix}, \quad \mathbb{V}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_{\xi\eta} \\ Q_\xi \\ Q_\eta \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

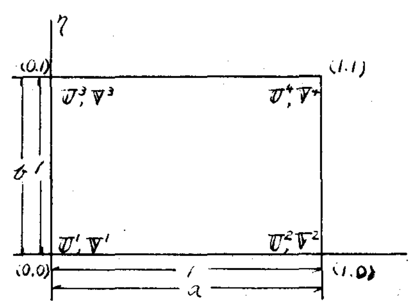


図-1. 要素の座標

式(1)においてξ, ηは無次元化した後の座標値である(図-1)，$\mathbb{u}(\xi,\eta)$，$\mathbb{v}(\xi,\eta)$は荷重項であり節点に作用する荷重ばかりでなく要素に一様に分布する荷重も含む，$\mathbb{X}$は基本微分方程式を解くことによって得られる未定係数群であり固有マトリクスといい12行1列の柱マトリクスである．

次に要素の4隅における変位状態ベクトルを用いて固有マトリクス$\mathbb{X}$を取りだす，得られた式を式(1b)に代入することにより式(3)が得られる，さらに式(3)に変換マトリクスを前がけして力釣り合いに必要な3成分の力ベクトルを得る．

$$\mathbb{V}^i = \lfloor \mathbb{a} \ \ \mathbb{b} \ \ \mathbb{c} \ \ \mathbb{d} \rfloor \begin{bmatrix} \mathbb{U}^1 \\ \mathbb{U}^2 \\ \mathbb{U}^3 \\ \mathbb{U}^4 \end{bmatrix} + \mathbb{e}^i q, \qquad (3) \qquad \mathbb{W}^i = \lfloor \alpha \ \ \beta \ \ \gamma \ \ \delta \rfloor \begin{bmatrix} \mathbb{U}^1 \\ \mathbb{U}^2 \\ \mathbb{U}^3 \\ \mathbb{U}^4 \end{bmatrix} + \phi^i q, \qquad (4)$$

ここに

$$\mathbb{W} = \{ \mathcal{F}_z \ \ \mathcal{M}_{yz} \ \ \mathcal{M}_{zx} \}, \qquad (5)$$

式(4)は平板の曲げ問題をとりあつかうに必要な最終式である．

3. 漸化式

図-2に示す一般的な節点(r,s)における力釣り合い式は

$$W^1_{r,s} + W^2_{r-1,s} + W^3_{r,s-1} + W^4_{r-1,s-1} = 0, \qquad (6)$$

となり式(6)を式(5)を用いて表わすと次式が得られる。

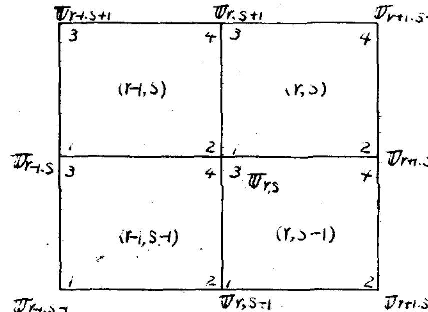


図-2. 節点(r,s)の力釣り合い

$$\lfloor a' \;\; a \;\; a'' \rfloor \begin{bmatrix} v_{r-1} \\ v_r \\ v_{r+1} \end{bmatrix}_{s-1} + \lfloor b' \;\; b \;\; b'' \rfloor \begin{bmatrix} v_{r-1} \\ v_r \\ v_{r+1} \end{bmatrix}_{s} + \lfloor c' \;\; c \;\; c'' \rfloor \begin{bmatrix} v_{r-1} \\ v_r \\ v_{r+1} \end{bmatrix}_{s+1}$$

$$= \lfloor e' \;\; e \rfloor \begin{bmatrix} q_{r-1} \\ q_r \end{bmatrix}_{s-1} - \lfloor f' \;\; f \rfloor \begin{bmatrix} q_{r-1} \\ q_r \end{bmatrix}_{s}, \qquad (7)$$

1節点に4個の要素が集まらない節点においては式(7)の不必要な成分をとりのぞくだけでよい。

節点S上の釣り合い式を集約すると

$$\begin{bmatrix} a_1 a_1 & & & & \\ a_2 a_2 a_2 & & & & \\ & a_3 a_3 a_3 & & & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & & a_m a_m a_m & \\ & & & & a_{m+1} a_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdots \\ v_n \\ v_{n+1} \end{bmatrix}_{s-1} + \begin{bmatrix} b_1 b_1 & & & & \\ b_2 b_2 b_2 & & & & \\ & b_3 b_3 b_3 & & & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & & b_m b_m b_m & \\ & & & & b_{m+1} b_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdots \\ v_n \\ v_{n+1} \end{bmatrix}_{s} + \begin{bmatrix} c_1 c_1 & & & & \\ c_2 c_2 c_2 & & & & \\ & c_3 c_3 c_3 & & & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & & c_m c_m c_m & \\ & & & & c_{m+1} c_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdots \\ v_n \\ v_{n+1} \end{bmatrix}_{s+1}$$

$$= \begin{bmatrix} e_1 & & & & \\ e_2 e_2 & & & & \\ & e_3 e_3 & & & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & & e_{m-1} e_{m-1} & \\ & & & & e_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \cdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}_{s-1} + \begin{bmatrix} f_1 & & & & \\ f_2 f_2 & & & & \\ & f_3 f_3 & & & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & & f_{m-1} f_{m-1} & \\ & & & & f_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \cdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}_{s}, \qquad (8)$$

最終式として式(8)を $S=1$ から $n+1$ まで集約して次式を得る。

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & A_n & B_n & C_n \\ & & & A_{n+1} & B_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & & & \\ E_2 & F_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \\ & & E_{n-1} & F_{n-1} \\ & & & E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

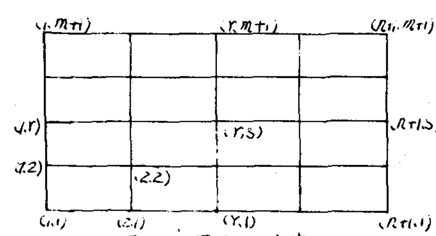
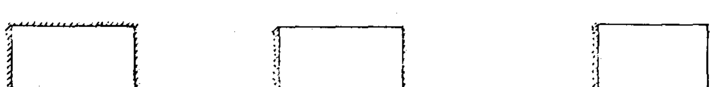


図-3. 要素の分割

4. 計算例

計算例として図に示す系についておこないましたので数値結果は別刷りいたします。



(a)　　(b)　　(c)

5. あとがき

漸化有限要素法の特色として多元の連立方程式を解く必要がない(漸化式になるため)。解析として複雑にならず格子状ラーメンの解析と同類なものとなる。座標値を変えるだけで不規則な四辺形に分割できる。これからの課題としてビルヂ構造物に漸化有限要素法を適用してみたいと考えています。

1969年12月17日記