

信州大学 学生員 〇小川泰造 河原勇

正 員 谷本勉之助 夏目正太郎

1. はじめに

固有函数法は 1940年 P. F. Papkovitsch¹⁾, 1941年 J. Fadl²⁾ により提案され, その後種々の解法が展開されている. 例えは 1964年 L. R. Herrmann³⁾ は Fourier 級数を用い, 1968年 H. D. Knostmann⁴⁾ 等は Collocation 法を用い, 板の曲げ及び面内問題を考察している. 固有函数法の大きな特徴は 境界条件が任意であり級数展開した場合の収斂が極めて良いことにある. 本解析は演算子法の立場から 等分布荷重満載の四辺固定の板の曲げ問題について (図-1) Fourier 級数を用い完全複素解析を試みた. 計算例において Neumann 展開を用いた結果とを比較してみた.

2. 解析について.

板の基本微分方程式は

$$\nabla^4 w = \frac{\delta(x, y)}{D}, \quad (1)$$

で与えられ, 図-1 の場合次の境界条件を満足する:

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_y \end{bmatrix}_{y=\pm a} = 0, \quad \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \end{bmatrix}_{x=\pm a} = 0, \quad (2)$$

ここで たわみ w を2つの函数の和の形で与える; $w = w_h + w_p$, それぞれの函数は次式を満足す:

$$\nabla^4 w_h = 0, \quad \nabla^4 w_p = \frac{\delta}{D}. \quad (3)$$

式(3-1), (3-2) は面軸対称の場合解として

$$w_h = \sum_{n=1}^{\infty} [\cos \lambda y, y \sin \lambda y]_n \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_n \cosh \lambda_n x, \quad w_p = [1 \ x^2 \ x^4] N_p \{1 \ y^2 \ y^4\}, \quad (4)$$

ここに λ_n は n 次の固有値を示し, A_n, B_n は n 次の未知定数, N_p は実数の未知積分定数マトリクス (固有マトリクス) である. 式(4-1)を式(2-1)に代入し所要の固有値方程式と未知定数間の関係式が導かれる;

$$\lambda_n + \sin \lambda_n = 0, \quad B_n = -\frac{\cos \lambda_n}{\sin \lambda_n} A_n. \quad (5)$$

すなわち 式(4-1)は新しい未知定数 K_n を用いて

$$w_h = \sum_n [\cos \lambda y, y \sin \lambda y]_n \begin{bmatrix} \sin \lambda \\ -\cos \lambda \end{bmatrix}_n \cosh \lambda x K_n, \quad (6)$$

となる. 更に次式を Fourier 級数展開すれば

表-1. 固有値 ($\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$)

n	α	β
1	2.106, 196, 115	1.125, 364, 306
2	5.356, 268, 699	1.551, 574, 373
3	8.536, 682, 427	1.775, 543, 674
4	11.699, 177, 613	1.929, 404, 497
5	14.854, 059, 913	2.046, 852, 463

$$[\cos \lambda y, y \sin \lambda y] \begin{bmatrix} \sin \lambda \\ -\cos \lambda \end{bmatrix}_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} \cos m\pi y \quad \left(a_{mn} = \frac{4(-1)^m \lambda^3}{[\lambda^2 - (m\pi)^2]^2} \right), \quad (7)$$

となり、式(6)は簡単な形に書かれ

$$w_n = \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\pi y [a_{mn} \cosh \lambda x] \{K_n\}, \quad (8)$$

また式(4-2)は式(2-2)を用いて固有マトリクス

N_p を求め、更に Fourier 級数展開すれば

$$w_p = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos m\pi y \quad \left(b_0 = \frac{8}{24D} \left(-\frac{16}{15} \right), b_m = \frac{8}{24D} \left(\frac{48(-1)^m}{(m\pi)^4} \right) \right), \quad (9)$$

となる。式(2-2)の残りの条件式より

$$\left[\begin{bmatrix} a_m \cosh \lambda x \\ a_m \lambda \sinh \lambda x \end{bmatrix}_n \right]_{x=2a} \{K_n\} = \left\{ \begin{bmatrix} b_m \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (10)$$

$$(m=0, 1, 2, \dots, N-1, n=1, 2, 3, \dots, N)$$

式(10)の逆マトリクスをとることにより、所要の K_n が求められる。

3. 計算例.

計算の過程と結果を Fourier 級数を用いたものと Neumann 展開によるものを比較して示す(図-2, 3, 表-2)。

4. まとめ.

固有函数法は一般には実虚部を分離し実部のみで解析が行なわれており、非常に解析が困難になっている。本解析法は次の4点が特徴として挙げられる：(1)完全にマトリクス代数を用いている、(2)複素量のままである、(3)Neumann 展開によれば Fourier 級数の収束の悪い問題も解決する、(4)データ分類が完全であるので解析が容易となり複合構造物への適用が可能である。

参考文献.

- 1) Papkovitch, F. P., "Über eine Form der Lösung des biharmonischen Problems für das Rechteck," Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences des l'URSS Moscow. USSR. Vol. 27, No. 4, 1940, pp. 334-338.
- 2) Fadie, J., "Die Selbstspannungs-Eigenwert-Functionen der quadratischen Scheibe," Ingenieur-Archiv. Berlin. Germany. Vol. 11, 1941, pp. 125-269.
- 3) Herrmann, L. R., "Bending Analysis for Clamped Rectangular Plates," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 90, No. EM3, Proc. Paper 3934, June, 1964, pp. 71-86.
- 4) Knostmann H. D. and Silvermann I. K., "Collocation and Eigenfunctions in Plane Elastostatics," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, No. EM3, Proc. Paper 5998, June, 1968 pp. 797-810.

- 5) Tanimoto, B. "Bending Analysis for Clamped Rectangular Plates, by L. R. Herrmann," Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 90, No. EM6, Proc. Paper 4160, Dec. 1964, pp. 279-284.

1969年12月17日

図-2. 係数の収束 ($a_{m0} = a + ib$)

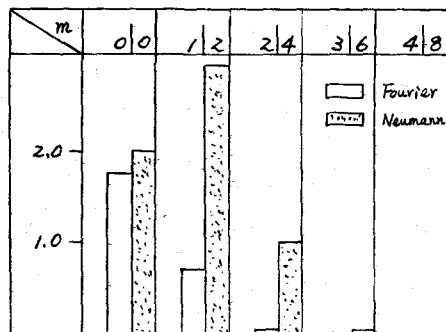


表-2. K_n の収束 ($K_n = K_n + iK'_n$)

	Fourier Series	Neumann Expansion
K_1	-0.2883	-0.1323
K'_1	-0.1305	0.8717×10^{-2}
K_2	0.9891×10^{-4}	0.9603×10^{-5}
K'_2	-0.1192×10^{-3}	-0.2643×10^{-4}
K_3	0.1571×10^{-5}	0.2222×10^{-6}
K'_3	0.6729×10^{-7}	-0.1640×10^{-7}

図-3. たわみ ($\times \frac{8a^4}{24D}$)

