

まえがき 2次元弾性問題において解こうとする領域を単位円に等角写像する関数係有理関数である場合は、積分方程式と解くことなく閉じた解を得られる(文献1)。従って写像関数係有理関数でない場合には、いかにして精度のよい有理近似写像関数と作るかが問題である。本論文では、図1に示すような十字形の領域について文献2で述べたと同じように分式関数の形で有理近似写像関数を作り応力解析を行った。

写像関数 図1に示す十字形の領域を単位円に等角写像する関数は、Schwarz-Christoffel の変換を用いて

$$Z = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int \frac{(1+j^4)^{\frac{1}{2}}}{(1-j^4)} dj \quad (1)$$

と表わされ、 $y$  および  $\pm \pi/4$  軸に対称である。帯り中は1。この対応する点は図1に示す。式(1)は  $j = \pm 1$  の近傍で帯が無限に伸びる対数的特異点のためにその附近での収束は極めて遅い。従って式(1)を対数的特異点を表わすオ1項と残りのオ2項とに分離する。

$$Z = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int \frac{\sqrt{2}}{1-j^4} dj + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left\{ \frac{(1+j^4)^{\frac{1}{2}}}{1-j^4} - \frac{\sqrt{2}}{1-j^4} \right\} dj \quad (2)$$

のように変形し、オ1項、オ2項各々別々に分式関数の形で近似写像関数を作ろうとするものでオ1項について写像関数の作り方を説明する。オ1項とべき級数に展開すると

$$\int \frac{1}{1-j^4} dj = \int \left\{ \frac{1}{5} j^5 + \frac{1}{9} j^9 + \dots + \frac{1}{4n-3} j^{4n-3} + \dots \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{4n-3} j^{4n-3} \quad (3)$$

これに対して近似写像関数を分式関数の形で次のように考える。

$$\sum_{j=1}^{12} \frac{A_j j}{1-j^4} = \sum_{j=1}^{12} (A_j j + A_0 j^5 + A_0^0 j^9 + \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{12} A_j^0 j^{4n-3} \quad (4)$$

ここに分式関数の個数は12個に選んだ。また  $|d_j| < 1$  である。ここで式(3)と式(4)を近似的に等しくなるように式(4)に言われている各々12個の未定定数  $A_j, A_j^0$  と定めようとするもので、今の場合未定定数を定める式は、

$$\sum_{j=1}^{12} A_j^0 j^{4n-3} = A_{4n-3} \quad (5)$$

の形で  $n$  は 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 の24個に選んだ。

193, 257, 313, 1025, 1537, 2049, 4097, 8193,

12289, 16385, 32769, 65537, 98305, 131072 の24個に選んだ。そこでこの24個の連立式を電子計算機で繰返し計算させ数値解析を行った。この値を表1の上段に示す。オ、

(5)のオ2項に対する近似関数の作り方も全く同様で、今の場合収束の速いこと、 $\pm$ 、符号と考慮し

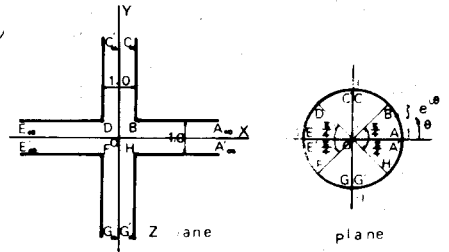


Figure-1

| 各分式関数の係数      |                 |               |                 |
|---------------|-----------------|---------------|-----------------|
| A             | B               | C             | D               |
| 0.99999928360 | 0.00000453786   | 0.99999928360 | 0.00000453786   |
| 0.9999642681  | 0.00004552141   | 0.9999642681  | 0.00004552141   |
| 0.9996795975  | 0.00004627129   | 0.9996795975  | 0.00004627129   |
| 0.99735301362 | 0.00277539747   | 0.99735301362 | 0.00277539747   |
| 0.97911679490 | 0.02156063238   | 0.97911679490 | 0.02156063238   |
| 0.84710305852 | 0.14656202272   | 0.84710305852 | 0.14656202272   |
| E             | F               | G             | H               |
| 0.98075002080 | -0.000297046228 | 0.98075002080 | -0.000297046228 |
| 0.80516587218 | -0.01499003567  | 0.80516587218 | -0.01499003567  |

$\sum_{j=1}^n \frac{B_j}{1+\beta_j^2}$  の形に選び、 $n=2, 3, 4, 5, 6, 17, 25, 33$  の値でべき級数の項が一致するように作った。この値を表1の下段に示す。かくして写像関数式(1)に対する有理近似写像関数は  $\zeta$  の1次の項と分数式の形で

$$Z = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left\{ \left( 1 - \sqrt{2} \sum_{j=1}^{12} A_j - \sum_{j=1}^4 B_j \right) + \sqrt{2} \sum_{j=1}^{12} \frac{A_j \zeta}{1 - \beta_j^2 \zeta^2} + \sum_{j=1}^4 \frac{B_j \zeta}{1 + \beta_j^2 \zeta^2} \right\} \quad (6)$$

として定めた。この近似写像関数の表わす領域とグラフに描いたのが図2で

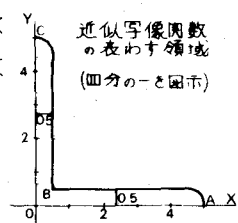


Figure 2

おり、座標値の一部を表2に載っている。また隅角部B, D, F, Hは本物から隅角であるが近似関数のため小さな丸味がついており、これらの点の曲率半径を計算すると  $\sim 0.00013$  (帯の幅と1として)と極めて小さな丸味である。これらより近似関数は、十分精度のよいことが判る。

境界条件および応力の計算 応力の解析方法は、文献1によるMuskhelishviliの方法を用いたがこれによりここでは述べないものと省略する。境界条件としては、x軸に沿って1軸およびx, y軸に沿って軸の方向にそれぞれ単位荷重1.0を載荷した2通りの場合と表した。図3にはx軸方向に1.0の荷重を引張った場合の隅角部附近の境界線上の総応力  $\sigma_{\theta\theta}$  の分布を描いた。またその座標値と応力の値を表2に示した。これらと見てもわかるように座標xの大きいところでは当然のことはながら総応力  $\sigma_{\theta\theta}$  は1.0であり、隅角部に近づくに従って急

隅角部附近の  $\sigma_{\theta\theta}$  の分布 (1軸引張)

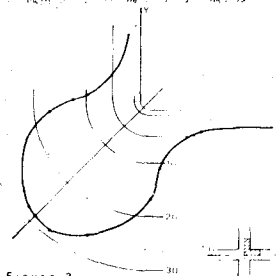


Figure 3

隅角部附近の  $\sigma_{\theta\theta}$  の分布 (2軸引張)

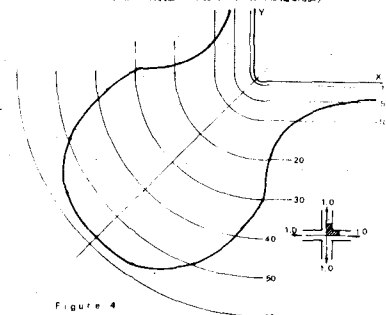


Figure 4

激に大きくなりかたりの応力集中が生じていることが

わかる。しかし最大応力は対称軸  $\theta/4$  に沿ってx軸方向ように生じている。次にy軸方向に隅角部より離れると急激に減少し、今度はかたりの距離にわたって総応力は、圧縮を生じている。

次にx, y軸に沿って2軸方向に1.0を引張った場合の応力分布を図4に示し、応力の値と表2に示した。

2. 2軸引張の場合には、1軸引張の場合と  $\theta/4$  軸に対称にならうに重ね合わせた場合に相当し最大総応力は  $\theta = \pi/4$  で生じ、かたりの応力集中を生じる。隅角部の丸味、大きさや境界条件と表した場合には、いづれ、いづれがきかぬと表した。

## 参考文献

- (1) Muskhelishvili: 「Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity」
- (2) 岡林、長谷部: 「ラーメン隅角部の角度と隅角部附近の応力について」ヤマハ回年次学術講演会

隅角部附近の総応力分布

Table 2

| $\theta$  | 座標        |           | 1軸引張(1/4)               | 2軸引張                    |
|-----------|-----------|-----------|-------------------------|-------------------------|
|           | X         | Y         | $\sigma_{\theta\theta}$ | $\sigma_{\theta\theta}$ |
| 0.01      | 1.826022  | 0.499765  | 1.00                    | 1.00                    |
| 0.06      | 1.826076  | 0.499947  | 1.00                    | 0.98                    |
| 0.08      | 1.826438  | 0.499751  | 1.00                    | 0.94                    |
| 0.1       | 1.829306  | 0.499708  | 1.00                    | 0.92                    |
| 0.2       | 0.874723  | 0.500164  | 1.02                    | 0.84                    |
| 0.3       | 0.746662  | 0.499914  | 1.07                    | 0.82                    |
| 0.4       | 0.661706  | 0.500008  | 1.13                    | 0.84                    |
| 0.5       | 0.597319  | 0.500028  | 1.23                    | 0.94                    |
| 0.6       | 0.549106  | 0.499992  | 1.42                    | 1.19                    |
| 0.72      | 0.510100  | 0.499992  | 2.13                    | 2.35                    |
| 0.75      | 0.504023  | 0.500007  | 2.84                    | 3.59                    |
| 0.77      | 0.501158  | 0.500015  | 4.25                    | 6.22                    |
| 0.78      | 0.500270  | 0.499993  | 10.96                   | 18.78                   |
| 0.782     | 0.500166  | 0.500001  | 16.88                   | 30.42                   |
| 0.784     | 0.500089  | 0.500002  | 26.08                   | 49.86                   |
| 0.785     | 0.500061  | 0.500042  | 28.95                   | 57.14                   |
| 0.7853    | 0.500053  | 0.500049  | 29.02                   | 57.85                   |
| 0.78539   | 0.500051  | 0.500051  | 28.96                   | 57.90                   |
| 0.785398  | 0.5000508 | 0.5000508 | 28.95                   | 57.90                   |
| 0.7853982 | 0.5000508 | 0.5000508 | 28.95                   | 57.90                   |
| 0.7856    | 0.500046  | 0.500056  | 28.66                   | 57.70                   |
| 0.786     | 0.500038  | 0.500066  | 27.54                   | 56.21                   |
| 0.788     | 0.500008  | 0.500132  | 17.17                   | 37.51                   |
| 0.789     | 0.500000  | 0.500175  | 12.15                   | 28.25                   |
| 0.79      | 0.499995  | 0.500225  | 8.61                    | 22.40                   |
| 0.8       | 0.500014  | 0.501069  | 2.09                    | 6.48                    |
| 0.85      | 0.499993  | 0.509915  | 0.22                    | 2.37                    |
| 0.9       | 0.499984  | 0.523513  | -0.08                   | 1.62                    |
| 1.        | 0.500005  | 0.561704  | -0.26                   | 1.09                    |
| 1.2       | 0.499978  | 0.684323  | -0.29                   | 0.83                    |
| 1.4       | 0.500216  | 0.924621  | -0.15                   | 0.85                    |
| 1.5       | 0.499982  | 1.203621  | -0.05                   | 0.94                    |
| 1.52      | 0.499991  | 1.306892  | -0.03                   | 0.96                    |
| 1.54      | 0.500071  | 1.467976  | -0.01                   | 0.98                    |
| 1.56      | 0.499974  | 1.801707  | 0.00                    | 1.00                    |