

名古屋大学 正員 成岡昌夫
 学生員 梶田建夫
 O学生員 奥 千秋

1. よえがら

板曲げ要素の精度、収束性に関する論文は非常に多く発表されており、とくに、三角形要素の剛性行列に関するものが多く、これは、有限要素法の特長である任意形状、任意の境界条件の板に解析するために、三角形要素を用いることが不可欠であるためであり、1961-2年Adini, Tsener によって誘導が試みられ、以来、常に注目されている問題となってきた。このような剛性行列は、この要分原理によって、Compatible, Equilibrium, Hybrid, Mixed Model と T.H.H. Pian によって分類されているが、とくに、Compatible, および Hybrid Model についての厳密な比較が試みられているのである。

2. Compatible Model

Compatible Model において、まず要素内で仮定される変位関数に拘束条件として、(a)要素間の変位の連続性、(b)一般にドム一定の条件、(c)各要素の境界における変位の連続性を仮定することになる。三角形要素の場合、とくに問題となるのは各要素の境界における normal slope の連続性であり、ここで、仮定される変位関数を完全多項式によって表すと、(a), (b) の条件に満足されるのが多項式の次数と要素の変位の自由度とを一致させることになる。(c) の条件は容易に満足できることがよくある。すなわち、 n 次の完全多項式の項数は $T = (n+1)(n+2)/2, \dots$ であり、今、頂点変位の自由度とわきの m 階までを $N = 3(n+1)(n+2)/2, \dots$ とし、残りの m 階までを $N_2 = 3(n+1)(n+2)/2, \dots$ とし、隣接する要素間の変位の連続性を満足するために、(a) に関し $S_1 = 3(n+1)$, normal slope に関し $S_2 = 3(n+1) \cdot 3n$, 合計 $3(n+1) \cdot (3n+1)$ の条件が必要である。しかし、頂点変位から導き出した適合条件式は、(a) に関し $3 \times 2(n+1)$, normal slope に関し $3 \times 2m$, 合計 $3(n+1)(2m+1)$ であり、結局、要素1辺に $N_2 = 3(n+1)(2m+1)$ の頂点変位をもうければ、要素間の変位の連続性を満足できる。したがって、要素1変位の全自由度は $N + N_2 = 6n^2 + 25nm + 15m^2, \dots$ となる。この要素1辺の1変位の自由度を M とすると、式(1), (2) から $N + M = T$ の関係が得られる。

式(1) により、 n が最も小さい $m=2, 3, 1$ とするが、実際には、 $m=1$ の場合が重要である。(a) $m=1$ の場合には、必要の変位の自由度は $N = 6n^2 - 6$ であり、頂点変位、全自由度は $M = (n-2)n \cdot 2$ となり、7次以上の完全多項式を用いては、(a), (b) の条件に満足する要素が得られるが、実際には、この G マトリックスが singular となり解が得られない。したがって、 $m=1$ の場合には、完全多項式を用いた三角形要素を誘導することは不可能であり、そこで、Ritz の方法により、要素をさらに三つの subelement に分割して誘導する。(c) (T-2), (T-1), (T-1) という、仮定の subelement において、3次の完全多項式で変位関数と仮定して剛性行列を誘導する方法であり、頂点変位の自由度は、頂点変位 $w^{\text{頂点}}$, および辺の変位 $w^{\text{辺}}$ の2変位をとり、(a) 境界における変位の連続性、(b) たとえば、辺 0-3 において subelement ①における normal slope $S_1^{\text{①}}$ と③における normal slope $S_3^{\text{③}}$ について、 $S_1^{\text{①}} + S_3^{\text{③}} = 0$ の関係により、満足される。

ロ) $m=2$ の場合、必要変位の自由度は $V=6n-9$ であるから、 $M=(n-4)(n-5)/2$ とになり、5次以上の完全多項式を用いれば、図-2のように、さきの条件を満足した三角形要素が得られる。(CCT-21)

以上のように、Compatible Modelにおいては、完全多項式の項数と変位の全自由度を一致させることにより、さきの条件を満足できるものの解析が非常に簡単であるが、変位の自由度が大きいという欠点がある。そこで、normal slope の次数を一度試すことにより、辺上変位をとりうるかとできる。たとえば、CCT-21の場合、要素間の normal slope が3次で変化可能とすると、辺上変位 θ_i は頂点変位により表わされることになり、要素の全自由度は19となる。(CCT-19)

3. Hybrid Model

この方法は、さき述べに Compatible Model と Equilibrium Model との中間に位置すると思われる方法で、1964年に Pian が二次元問題に適用し、これが初めて、板曲げ解析において、1960年に R.T. Severn が矩形、直角三角形要素に適用し、1969年には、R.T. Allwood により、任意の角形要素について適用している。この方法は、ポテンシャルエネルギー原理を用いる方法と、コンプレメンタリーエネルギー原理を用いる方法とがあるが、本論文では、後者の方法についてみる。

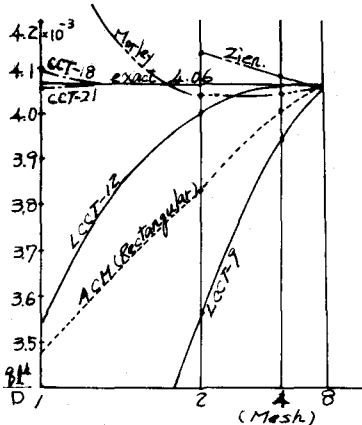
Compatible Model においては、要素内で、変位を仮定したが、Hybrid Model においては、要素内でつり合い状態と満足するよう応力関数を仮定し、要素の境界においては、変位の連続性を満足させて剛性行列を誘導するものである。この方法の長所は、仮定される応力関数が何次の多項式でも、節点変位の自由度が増えるということである。たとえば、各境界における変位を2次式で仮定すれば、節点変位の自由度は9になり、仮定される応力関数を1, 2, 3次にしても、解析が複雑になるだけで、変位の全自由度は9位と変わらない。

4. 精度の比較

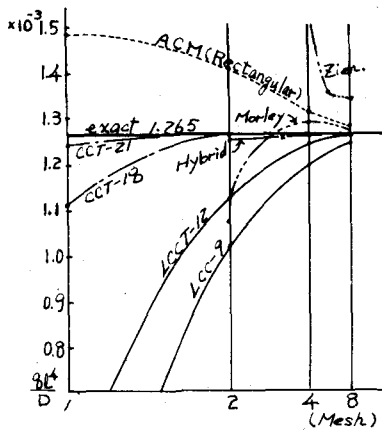
当日、発表の予定である。

<参考文献>

1. C.A. Felipa, "Refined Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear 2-Dimensional Structures", SESM Report No 66-22, Univ. of California, Berkeley, California, 1966.



用辺単純支持正方形板



周辺固定正方形板